2008. november 10/11.

Lineáris algebra (A, B, C)
9. előadás
(vázlat)

Már a rangtétel bizonyításában is szerepelt az a megjegyzés, hogy oszlopcserétől nem változik meg az oszlopvektorrendszer rangja. Így például tetszőleges (továbbra is $\mathbb{R}$ feletti) vektortér elemeire teljesül $r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, ..., \mathbf{a}_k)$, sőt $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, ...\mathbf{a}_k \rangle$ $= \langle \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \rangle$ (tehát az alterek is megegyeznek, nemcsak a dimenziójuk). A csere tehát ún. rangtartó átalakítás. Hasonló tulajdonságú még egy vektor szorzása nullától különböző valós számmal; egy vektorhoz egy másik vektor hozzáadása (de a másik vektor megmarad); egy vektorhoz egy másik vektor számszorosának hozzáadása (a másik vektor megmarad). Mindezek hasonlóan bizonyíthatók (a megfelelő alterek megegyezését igazolva). Az első, második vektorra fogalmazva részletes bizonyítás nélkül összefoglalva:
TÉTEL (rangtartó átalakítások): $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in V$ (vt. $\mathbb{R}$ felett), $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ esetén
$r(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$,
$r(\lambda\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$,
$r(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$,
$r(\mathbf{a}_1 + \lambda\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k) = r(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k)$.
Ha adott egy nullmátrixtól különböző mátrixunk, akkor véges sok rangtartó átalakítással (oszlopokra is, sorokra is szabad) szép alakra hozhatjuk: Keresünk egy nemnulla elemet, s ha szükséges, sorcserével és oszlopcserével a bal felső sarokba visszük. Ezután az első oszlopot megszorozzuk a bal felső sarokban lévő szám reciprokával, majd az első oszlop alkalmas számszorosát hozzáadva a többi oszlophoz, az első sort a második elemétől kezdve végig nullává változtatjuk, majd ugyanezt megtesszük az első oszloppal, azután ugyanezt végezzük az első sor és első oszlop elhagyásával megmaradó mátrixon (ha ez nullmátrix, akkor máris szép az alak), és így tovább. Jelentse a $\rightsquigarrow$ jel azt, hogy az előtte lévő mátrix véges sok rangtartó (és mérettartó) átalakítás segítségével az utána lévő mátrixszá alakítható. Tehát:
TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\varrho(A) = r \geqq 1$ esetén $A \rightsquigarrow \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$.
Bizonyítás nélkül közöljük ezen tételnek egy különösen hasznos változatát:
$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\varrho(A) = r \geqq 1$ esetén vegyünk egy I_n egységmátrixot a soros átalakítások kezdőmátrixaként, egy I_m egységmátrixot az oszlopos átalakításokhoz ($n = m$ esetén két I_n-et); ezután az $A \rightsquigarrow \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ átalakítássorozatból rendre hajtsuk végre az első soros átalakítást az I_n-en, a következő sorosat már az I_n-ből kapott mátrixon és így tovább, az utolsó eredmény legyen S; az első oszlopos átalakítást az I_m-en hajtjuk végre, a következőt az I_m-ből kapott mátrixon és így tovább, az utolsó eredmény legyen P. Ekkor S és P invertálható mátrixok, melyekre

$$SAP = \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Alkalmazásként az eddigi inverzeknél kevesebbet tudó, viszont mindig létező általánosított inverzeket keresünk.
DEFINÍCIÓ: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ esetén az $A^{(\mathrm{g})}$ egy általánosított inverze az A-nak, ha $A^{(\mathrm{g})} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és $AA^{(\mathrm{g})}A = A$.

Világos, hogy a $\mathbf{0}$ általánosított inverzeinek halmaza: $\{\mathbf{0}^{(\mathrm{g})}\} = \mathbb{R}^{m\times n}$. $A \neq \mathbf{0}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ esetén $r = \varrho(A) \geqq 1$, így az előző tétel szerint létezik (bár nem egyértelműen) olyan invertálható S és P, hogy $SAP = \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$. Ezeket rögzítve, tetszőleges $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$-re

$AXA = A \Leftrightarrow SAXAP = SAP \Leftrightarrow SAPP^{-1}XS^{-1}SAP = SAP$.

Legyen most $Y = P^{-1}XS^{-1} = \begin{bmatrix} U & V \\ W & Z \end{bmatrix}$, melyet célszerű úgy partícionálnunk, hogy a bal felső U blokk $r\times r$-es legyen, a többi pedig olyan, amit az $m \times n$ méret enged (így biztosan csak az U létezik, a többinek, vagy csak kettőnek esetleg nem jut hely). Így

$AXA = A \Leftrightarrow SAPYSAP = SAP \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U & V \\ W & Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{bmatrix} U & V \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} U & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Leftrightarrow U = I_r$.

Ezzel rögzített S és P esetén meghatároztuk a fenti A összes általánosított inverzét: $\{A^{(\mathrm{g})}\} = \{P \begin{bmatrix} I_r & V \\ W & Z \end{bmatrix} S\}$, ahol V, W, Z tetszőleges valós elemű mátrixok, amit az előírt alak megenged.

A következő témakör bevezetőjeként emlékeztetünk három térvektor vegyes szorzatára, amelynek nemnulla volta a vektorrendszer lineáris függetlenségével volt ekvivalens (2/3). Az $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ valós elemű mátrix oszlopai segítségével definiált $[\mathbf{a}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$, $[\mathbf{b}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}$, $[\mathbf{c}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$ esetén az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ térvektorok $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$ vegyes szorzatát kiszámolva (2/3 és 2/2 tételeivel), az eredmény:

$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$.

Ezt szeretnénk most általánosítani $n\times n$-es valós elemű mátrix esetére lehetőleg úgy, hogy nemnulla volta azzal legyen ekvivalens, hogy a rang n. A szorzatokat úgy rendeztük, hogy mindegyikben az $\{1, 2, 3\}$ sorindexek szerepeljenek, röviden: 123. Ekkor a következő oszlopindexek találhatók mellettük: 123, 231, 312, 321, 132, 213. Itt éppen az 123 számok összes permutációját írtuk le, melynek az általánosítása kézenfekvő. Az előjelezés megfejtése céljából próbáljuk őket szomszédos cserékkel az 123 alakra hozni: az alkalmas szomszédos cserék száma lehet pl. rendre $0, 2, 2, 3, 1, 1$. Ez ugyan nem egyértelmű, de csak az az észrevétel a fontos, hogy az első háromnál páros, a második háromnál páratlan szám adódott.

Adott n pozitív egész esetén most tekintsük az $1, 2, ..., n$ számok összes permutációját, válasszunk ki közülük egy $i_1, i_2, ..., i_n$ permutációt (ez az $1, 2, ..., n$ valamilyen sorrendben). Azt mondjuk, hogy ebben a permutációban az (i_μ, i_ν) elempár inverzióban van (vagy inverziót alkot), ha $\mu < \nu$, de $i_\mu > i_\nu$. Jelöljük $I(i_1, i_2, ..., i_n)$-nel az $i_1, i_2, ..., i_n$ permutációban az inverziót alkotó elempárok számát. Ezt írva (-1) kitevőjébe, sikerül az előjelezés általánosítása. Ezek szerint $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, ${}_j[A]_k = a_{jk}$ esetén célszerű képeznünk minden $i_1, i_2, ..., i_n$ permutációra az $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdot ... \cdot a_{ni_n}$ szorzatot, megszorozni $(-1)^{I(i_1,i_2,...,i_n)}$-nel, majd a kapott kifejezéseket összeadni. Az $1, 2, ..., n$ számok összes $i_1, i_2, ..., i_n$ permutációjára vonatkozó összegezést úgy fogjuk jelölni, hogy egy szumma jel alá odaírjuk az $i_1, ..., i_n$ permutációt, alája zárójelben pedig az $1, ..., n$-et.

DEFINÍCIÓ: Az $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix **determinánsa** egy alább definiált **szám**, melyet röviden $|A|$-val jelölünk, részletesebben kiírhatjuk a mátrix elemeit a szokott módon, de függőleges vonalak közé:

$$(|A| =) \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{i_1,\dots,i_n \\ (1,\dots,n)}} (-1)^{I(i_1,i_2,\dots,i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n}.$$

$n = 2$ esetén ez $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Az $n = 3$ fentebb látható, de az is látszik, hogy nagy n esetén a definícióval való számolás borzasztóan műveletigényes.
A determináns definíciójával való számolás műveletigényessége miatt kellenek a számolást megkönnyítő tételek. $|\mathbf{0}| = 0$, de a 0 eredményhez az is elég, ha egyetlen sorban végig 0 van. Ha egyetlen sort megszorzunk λ-val, a mátrix determinánsa λ-val szorzódik, így $|\lambda A| = \lambda^n |A|$. Bizonyítás nélkül megemlítjük még, hogy $|A^\top| = |A|$.
Láttuk már, hogy $|\lambda A| = \lambda^n |A|$, így speciálisan $|2A| = 2^n |A|$ mutatja, hogy az összeadással is vigyázni kell: $|A + B| \overset{\acute{a}lt}{\neq} |A| + |B|$, például $A = B = I_2$ esetén $4 = |2I_2| \neq 2|I_2| = 2$. Ha egyetlen sort szoroztunk λ-val, akkor a mátrix determinánsa λ-val szorzódott. Ennek alapján azzal érdemes próbálkozni, amikor csak egyetlen sorban vannak összegek. Tegyük fel, hogy az A mátrix k-adik sorában kéttagú összegek vannak: $a_{kj} = b_{kj} + c_{kj}\, (j = 1, \dots, n)$. Ekkor a definícióban a (-1)-hatvány utáni szorzat k-adik tényezője (a_{ki_k}) helyébe $b_{ki_k} + c_{ki_k}$ kerül, így az egész szummát két szumma összegére bonthatjuk:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} + c_{k1} & b_{k2} + c_{k2} & \dots & b_{kn} + c_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \dots & c_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Szükségünk lesz az inverziószám változásának ismeretére, amikor a permutációban az elemeket cserélgetjük. Könnyű látni, hogy szomszédos elemek cseréje esetén az inverziószám 1-gyel változik (1-gyel nő, vagy csökken), a távolabbi elemek cseréjét visszavezethetjük szomszédos elemek páratlan számú cseréjére, ebből kideríthetjük sorcserénél a determináns változását, de ezt csak bizonyítás nélkül közöljük:
TÉTEL: Legyen $n \geqq 2$.
a) Ha az $1, 2, \dots, n$ számok $i_1, i_2, \dots, i_n$ permutációjában két elemet felcserélünk, akkor az inverziószám páratlan számmal változik.
b) Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix valamely két sorát felcseréljük, akkor az így nyert B mátrix determinánsa: $|B| = -|A|$, azaz két sor felcserélése esetén a determináns értéke (-1)-gyel szorzódik.
Részletezzük viszont a fenti tételnek két igen fontos következményét.

TÉTEL: Ha $n \geqq 2$ és az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixnak van két megegyező sora, akkor A determinánsa 0.
[Biz: a két azonos sor felcserélésétől egyrészt nem változik a mátrix, így a determinánsa sem, másrészt a cserétől determinánsa (-1)-gyel szorzódik. Tehát $|A| = -|A|$, azaz $|A| + |A| = 0$, így $|A| = 0$. [Itt számokról van szó, de jegyezzük meg, hogy a legutolsó következtetés más struktúrákban általában nem érvényes, pl. $1 + 1 \equiv 0 \mod 2$, de $1 \not\equiv 0 \mod 2$.]]
TÉTEL: Ha $n \geqq 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix egyik sorához egy **másik** sorának a λ-szorosát hozzáadjuk, akkor az így keletkezett mátrix determinánsa is $|A|$, tehát az a *rangtartó* átalakítás, amikor egyik sorhoz egy másik sor számszorosát adjuk, egyben **determinánstartó** is!
[Biz: Jelöljük ${}_k[A]$-val az A mátrix k-adik sorát. Az egyszerűség kedvéért csak azt részletezzük, amikor az első sorhoz adjuk hozzá a második sor λ-szorosát. Ekkor

$$\begin{vmatrix} {}_1[A] + \lambda\, {}_2[A] \\ {}_2[A] \\ \vdots \\ {}_n[A] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}_1[A] \\ {}_2[A] \\ \vdots \\ {}_n[A] \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda\, {}_2[A] \\ {}_2[A] \\ \vdots \\ {}_n[A] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {}_1[A] \\ {}_2[A] \\ \vdots \\ {}_n[A] \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} {}_2[A] \\ {}_2[A] \\ \vdots \\ {}_n[A] \end{vmatrix} = |A| + \lambda 0 = |A|.$$

Az általános esetben hasonlóan megy a bizonyítás.]
Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ egy sorában végig 0 van, akkor már tudjuk, hogy 0 a mátrix determinánsa. Most vizsgáljuk meg egy egyszerű esetben azt, amikor egy sor majdnem végig 0, pl. A utolsó sorában az utolsó elem kivételével minden 0. Eme speciális szerkezetű mátrix determinánsára írjuk fel a definíciót részletesen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{\substack{i_1,\dots,i_{n-1},i_n \\ (1,\dots,n-1,n)}} (-1)^{I(i_1,i_2,\dots,i_{n-1},i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{n-1,i_{n-1}} a_{ni_n}.$$

Tekintsük az összeg azon tagjait, amelyekben az $i_n < n$. Ezeknél a szorzat utolsó tényezője: $a_{ni_n} = 0$, s az összeg vizsgált tagja is 0. Eszerint az összegnek sok tagja [pontosan $(n-1) \cdot (n-1)! = n! - (n-1)!$ darab] 0, ezeket el is hagyhatjuk. Maradnak azok a tagok, ahol $i_n = n$ [ilyen van $(n-1)!$ darab], speciális mátrixunk determinánsa tehát

$$= \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{n-1},n \\ (1,\dots,n-1,n)}} (-1)^{I(i_1,i_2,\dots,i_{n-1},n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{n-1,i_{n-1}} a_{nn}.$$

Az összegezés most úgy értendő, hogy az $1, 2, \dots, n$ azon permutációira összegezünk, ahol az utolsó helyen n áll. Ekkor az előtte lévő $i_1, \dots, i_{n-1}$ befutja az $1, 2, \dots, n-1$ összes permutációját, ennek megfelelően módosítjuk a szumma alatti részt. Örömmel látjuk, hogy $I(i_1, \dots, i_{n-1}, n) = I(i_1, \dots, i_{n-1})$, mert az n leghátul állt, s az előtte lévőknél nagyobb, így egyikkel sem alkothatott inverziót. Ezután a_{nn} kiemelésével

$$a_{nn} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_{n-1} \\ (1,\dots,n-1)}} (-1)^{I(i_1,i_2,\dots,i_{n-1})} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{n-1,i_{n-1}}$$

adódik, ahol az összegben felismerhetjük az A bal felső sarkában lévő $(n-1)\times(n-1)$-es rész determinánsát, s nyertük a következőt:
TÉTEL:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

KÖVETKEZMÉNY: Felső háromszög mátrix (8/3) determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{n-1,n-1}a_{nn}.$$

Így persze diagonális mátrixok determinánsa is a főátlóban lévő elemek szorzata, például $|I_n| = 1$. Szerepelt már (bizonyítás nélkül), hogy $|A^\top| = |A|$, így a sorokra megfogalmazott állítások oszlopokra is érvényesek, tehát pl. alsó háromszög mátrix determinánsa is a főátlóban lévő elemek szorzata.

Most már lehetőségünk van arra, hogy egy determináns értékét elemi bázistranszformáció segítségével számoljuk ki.

Ha $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olyan, hogy $\varrho(A) < n$, akkor az oszlopvektorrendszer Ö, tehát $\exists\, \mathbf{a}_j$, ami lineárisan függ a többitől, pl. $\mathbf{a}_j = \alpha_1\mathbf{a}_1 + ... + \alpha_{j-1}\mathbf{a}_{j-1} + \alpha_{j+1}\mathbf{a}_{j+1} + ... + \alpha_n\mathbf{a}_n$. Ekkor a j-edik oszlophoz hozzáadhatjuk $k = 1, ..., j-1, j+1, ..., n$-re a k-adik oszlop $-\alpha_k$-szorosát, így a determináns nem változik, viszont a j-edik oszlopba csupa 0 kerül, tehát $\varrho(A) < n$ esetén $|A| = 0$. $\varrho(A) = n$ esetén mindent be tudunk vinni a bázisba, de nem biztos, hogy az eredeti sorrendben. Másrészt most célszerű kiírnunk a bevitt vektorok koordinátáit is, mert így nem rontjuk el az $n \times n$-es alakot, és egy általános elemi bázistranszformációs lépésnél összehasonlíthatjuk a régi (lépés előtti) mátrix és az új (lépés utáni) mátrix determinánsát, mégpedig úgy, hogy közbeiktatunk egy segédmátrixot. Az indexelési nehézségek miatt sem az $\mathbf{a}$, sem az $\mathbf{e}$ vektorokat nem írjuk ki, csupán a koordinátákból adódó mátrixot. Legyen a régi mátrix

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1j} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1} & \dots & \beta_{ij} & \dots & \beta_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nj} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix},$$ és tegyük fel, hogy éppen az $\mathbf{a}_j$-t visszük be az $\mathbf{e}_i$ helyére,

feltéve természetesen, hogy $\beta_{ij} \neq 0$. Ezt a nullától különböző β_{ij}-t szokás a lépés generáló elemének hívni, s ha épppen a k-adik lépésről van szó, g_k-val is jelölni.

Képezzünk egy segédmátrixot úgy, hogy a régi mátrix i-edik sorát megszorozzuk a $\beta_{ij}{}^{-1}$ számmal:

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1j} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1}/\beta_{ij} & \dots & 1 & \dots & \beta_{in}/\beta_{ij} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nj} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix},$$

tehát a régi mátrix determinánsa a segédmátrix determinánsának β_{ij}-szerese.
Ezután a segédmátrix i-edik sorának j-edik helyén álló 1 segítségével kinullázhatjuk a j-edik oszlop többi elemét, mégpedig determinánstartó átalakításokkal: minden $k \neq i$-re adjuk hozzá a k-adik sorhoz az i-edik sor $-\beta_{kj}$-szeresét. Ekkor épp az új mátrixot kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} - \beta_{1j} \cdot \beta_{i1}/\beta_{ij} & \dots & 0 & \dots & \beta_{1n} - \beta_{1j} \cdot \beta_{in}/\beta_{ij} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{i1}/\beta_{ij} & \dots & 1 & \dots & \beta_{in}/\beta_{ij} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \beta_{n1} - \beta_{nj} \cdot \beta_{i1}/\beta_{ij} & \dots & 0 & \dots & \beta_{nn} - \beta_{nj} \cdot \beta_{in}/\beta_{ij} \end{bmatrix}.$$

Mivel az új mátrixot a segédmátrixból már determinánstartó átalakításokkal nyertük, ezek determinánsa megegyezik, tehát a régi mátrix determinánsa az új mátrix determinánsának is β_{ij}-szerese, azaz g_k-szorosa. $\varrho(A) = n$ esetén n lépést végzünk, az A determinánsa $g_1 g_2 \cdot \dots \cdot g_n$-szerese az n-edik lépés utáni új mátrix $|\acute{U}|$ determinánsának. Ha az $\mathbf{a}$-kat az eredeti sorrendben sikerült bevinni a bázisba, akkor ez az utolsó új mátrix I_n. Egyébként, ha a bevitt elemek sorrendje a bázisban, mondjuk $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_n}$ (itt az $i_1, i_2, \dots, i_n$ az $1, 2, \dots, n$ egy permutációja), akkor cseréket kell végeznünk, amíg az eredeti sorrendbe nem kerülnek. Tekintsük a $(-1)^{I(i_1,\dots,i_n)}|\acute{U}|$ szorzatot. Ha most felcserélünk két báziselemet, akkor az inverziószám páratlan számmal változik, s a szorzat első tényezője (-1)-szeresére változik, de a második tényező is így változik a sorcsere miatt, végeredményben a szorzat nem változik; mikor pedig már eljutottunk az eredeti sorrendhez, akkor $(-1)^{I(1,\dots,n)}|I_n| = (-1)^0 1 = 1$ adódik. Tehát $|\acute{U}| = (-1)^{I(i_1,\dots,i_n)}$,

$$|A| = g_1 g_2 \cdot \dots \cdot g_n \cdot (-1)^{I(i_1,\dots,i_n)}.$$

KÖVETKEZMÉNY: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ esetén

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow \varrho(A) = n \Leftrightarrow \exists\, A^{-1}.$$