2008. november 3/4.

Lineáris algebra (A, B, C)
8. előadás
(vázlat)

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|c|}
 & \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_r & \mathbf{a}_{r+1} & \dots & \mathbf{a}_m & \mathbf{b} \\ \hline
\mathbf{a}_1 & & & & & & & \\
\vdots & & I_r & & & D & & \mathbf{d} \\
\mathbf{a}_r & & & & & & & \\ \hline
\mathbf{e}'_{r+1} & & & & & & & \\
\vdots & & \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
\mathbf{e}'_n & & & & & & &
\end{array}$$

Legyen most $A_1 = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_r]$, $A_2 = [I_r, D]$. Ekkor könnyen ellenőrizhető a táblázat alapján, hogy $A_1\mathbf{d} = \mathbf{b}$ és $A = A_1A_2$. Így $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ esetén
$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow A_1A_2\mathbf{x} = A_1\mathbf{d} \Leftrightarrow A_1(A_2\mathbf{x} - \mathbf{d}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow A_2\mathbf{x} - \mathbf{d} = \mathbf{0}$
teljesül, ahol ki kell emelnünk, hogy az utolsó ekvivalencia $\Rightarrow$ iránya egyáltalán nem nyilvánvaló: nem elég hozzá, hogy $A_1 \neq \mathbf{0}$, mert nullmátrixtól különböző mátrixok szorzata lehet nullmátrix! A $\Rightarrow$ abból adódik, hogy az A_1 oszlopvektorai, $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_r$ lineárisan független vektorrendszert alkotnak!
A folytatásban a partícionálás alkalmazásához célszerű az $\mathbf{x}$ megfelelő partícionálása, ahol az indexekkel jelezzük a méretet. Ekkor azonban, ha netán $r = m - r$, akkor jogtalan specializálás lenne, ha a fölső és az alsó rész eleve azonos volna. Ezt a zavart vesszőkkel kerüljük el.
Tehát tetszőleges $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_r \\ \mathbf{x}''_{m-r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ esetén
$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow A_2\mathbf{x} = \mathbf{d} \Leftrightarrow [I_r, D] \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_r \\ \mathbf{x}''_{m-r} \end{bmatrix} = \mathbf{d} \Leftrightarrow \mathbf{x}'_r = \mathbf{d} - D\mathbf{x}''_{m-r}$,
amivel megkaptuk az általános megoldást: $\mathbf{x}''_{m-r}$ komponensei a szabad (vagy független) változók, $\mathbf{x}'_r$ komponensei a kötött (vagy függő) változók. Mivel az elemi bázistranszformáció sokféleképpen végezhető, ezek helye nem egyértelmű, de darabszámuk egyértelmű.
[Most kellene még visszacserélni az indexeket az eredeti lineáris egyenletrendszer általános megoldásának felírásához.]

TÉTEL: Tetszőleges $\mathbb{R}$ feletti A mátrixra $\varrho_{\mathcal{O}}(A) = \varrho_{\mathcal{S}}(A)$ [ezentúl $= \varrho(A)$, az A rangja; a ϱ helyett használatos ρ vagy akár r is].
[Bizonyítás: Az állítás nyilvánvaló, ha $A = \mathbf{0}$. $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $A \neq \mathbf{0}$ esetén használni szeretnénk az előbbi elemi bázistranszformációs számolásokat. Ehhez meg kell említeni, hogy az ottani indexcserétől (oszlopcserétől) nem változik sem az oszloprang, sem a sorrang; továbbá az $r = m$ esetet is nézni kell, ekkor legyen $A_2 = I_m$. Így $0 < r \leqq m$ esetén is teljesül az $A = A_1A_2$. Tehát
$\varrho_{\mathcal{S}}(A) = \varrho_{\mathcal{O}}((A_1A_2)^\top) = \varrho_{\mathcal{O}}(A_2^\top A_1^\top) \leqq \varrho_{\mathcal{O}}(A_2^\top) = r = \varrho_{\mathcal{O}}(A)$.
Miután tetszőleges mátrixra beláttuk a $\varrho_{\mathcal{S}}(A) \leqq \varrho_{\mathcal{O}}(A)$ egyenlőtlenséget, most felírhatjuk ugyanezt az $A^\top$ mátrixra is, ami az A-ra adja a hiányzó ellenkező irányú egyenlőtlenséget.]
Ezután az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ általánosításaként $AX = B$ és $YC = D$ alakú mátrixegyenletekkel foglalkozunk (adott A, B illetve C, D mátrixok esetén), melynek motivációja lehet például

a korábbi problémás eset, amikor jó lett volna az A_1-gyel olyan alapon „egyszerűsíteni", hogy valami alkalmas mátrixszal balról szorzunk. $YC = D \Leftrightarrow C^\top Y^\top = D^\top$ miatt elég az $AX = B$-vel foglalkoznunk a természetes méretfeltétel mellett.
$A = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m] \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B = [\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k] \in \mathbb{R}^{n\times k}$ esetén keressük az $X \in \mathbb{R}^{m\times k}$ megoldást $X = [\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k]$ alakban:
$AX = B \Leftrightarrow A[\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k] = [\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k] \Leftrightarrow [A\mathbf{x}_1, ..., A\mathbf{x}_k] = [\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k] \Leftrightarrow$
$\mathrm{Ax}_i = \mathbf{b}_i$ $(i = 1, ..., k)$.
A fenti alakok esetén az $AX = B$ megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele tehát az, hogy mind a k darab (azonos mátrixú) lineáris egyenletrendszer megoldható legyen, azaz, hogy $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k \in \langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m \rangle$ teljesüljön.
A fentieket alkalmazzuk abban a különösen érdekes esetben, amikor a B, illetve a D helyén egységmátrix van.
DEFINÍCIÓ: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ esetén:
az $A^{(\mathrm{j})}$ egy jobb oldali inverze az A-nak, ha $A^{(\mathrm{j})} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és $AA^{(\mathrm{j})} = I_n$;
az $A^{(\mathrm{b})}$ egy bal oldali inverze az A-nak, ha $A^{(\mathrm{b})} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és $A^{(\mathrm{b})}A = I_m$;
az A^{-1} kétoldali inverze A-nak, ha bal oldali inverze is és jobb oldali inverze is A-nak.
Tudjuk, hogy $A = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ esetén az $AX = I_n = [\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n]$ megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele: $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n \in \langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m \rangle$. Ez viszont (mivel $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ az $\mathbb{R}^n$ triviális bázisa) $\Leftrightarrow$ $\langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n \rangle \subseteqq \langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m \rangle \Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n \subseteqq \langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m \rangle \Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n = \langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m \rangle$, hiszen $\langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m \rangle \subseteqq \mathbb{R}^n$ nyilvánvaló. Eme trivialitás biztosítja, hogy $\mathbb{R}^n = \langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m \rangle \Leftrightarrow \dim \mathbb{R}^n = \dim\langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m \rangle$ [egy n dimenziós V vektortér n dimenziós alterének egy bázisa L lévén a V-ben, a 2. sz. kicserélési tétel δ része szerint bázis V-ben].
Ezzel már be is bizonyítottuk a következő tétel (1) állítását.
TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ esetén:
(1) $\quad \exists\, A^{(\mathrm{j})} \Leftrightarrow \varrho(A) = n$;
(2) $\quad \exists\, A^{(\mathrm{b})} \Leftrightarrow \varrho(A) = m$;
(3) $\quad \exists\, A^{-1} \Rightarrow \varrho(A) = n = m \Rightarrow \exists\, A^{(\mathrm{b})}, \exists\, A^{(\mathrm{j})}$ és egyenlők $\Rightarrow \exists!\, A^{-1}$.
[Az (1) állítást már bizonyítottuk. Ebből adódik a (2) állítás, mivel $\exists\, A^{(\mathrm{b})} \Leftrightarrow \exists\, (A^\top)^{(\mathrm{j})}$.
A (3) állításból még bizonyítandó rész: $\exists\, A^{(\mathrm{b})}, \exists\, A^{(\mathrm{j})}$ esetén vizsgáljuk $A^{(\mathrm{b})}AA^{(\mathrm{j})}$-t:
$A^{(\mathrm{j})} = I_m A^{(\mathrm{j})} = (A^{(\mathrm{b})}A)A^{(\mathrm{j})} = A^{(\mathrm{b})}(AA^{(\mathrm{j})}) = A^{(\mathrm{b})}I_n = A^{(\mathrm{b})}$.]
Vizsgáljuk most négyzetes mátrix inverzének numerikus meghatározását elemi bázistranszformációval $A = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén:
Ha $\varrho(A) < n$ (amikor nem tudunk minden $\mathbf{a}$-t bevinni a bázisba), akkor $\nexists\, A^{-1}$.
Egyébként viszont gondoljunk arra, hogy most az $A\mathbf{x}_i = \mathbf{e}_i$ $(i = 1, ..., n)$ azonos mátrixú lineáris egyenletrendszereket kell megoldanunk, s ezt egyszerre is tehetjük: csak most egy $\mathbf{b}$ helyett n darab lesz, éspedig $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$. Legyen tehát a kiinduló (dupla) táblázat a következő (mátrixos jelöléssel):

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|}
 & \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n & \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_n \\
\mathbf{e}_1 & & & & & & \\
\vdots & & A & & & I_n & \\
\mathbf{e}_n & & & & & &
\end{array}$$

Most végezzünk elemi bázistranszformációt a szokásos módon (mindig $\mathbf{a}_\bullet \to \mathbf{e}_{\bullet\bullet}$), a jobb oldali részen lévő $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$-nek persze mindig csak az új koordinátáit számoljuk. [Ha előzetesen nem határoztuk meg a rangot, az sem baj, innen is kiderülhet $\varrho(A) < n$, csak akkor némi felesleges munkát is végeztünk.] Ha $\varrho(A) = n$, akkor minden $\mathbf{a}$-t be tudunk vinni a bázisba, de nem biztos, hogy az eredeti sorrendben!!! Ekkor még sorcseréket kell végeznünk, hogy a bázisban $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n$ legyen a sorrend.

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|}
 & \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n & \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_n \\
\mathbf{a}_1 & & & & & & \\
\vdots & & I_n & & & A^{-1} & \\
\mathbf{a}_n & & & & & &
\end{array}$$

Itt az I_n kontrollmátrix jelzi, hogy már jó a sorrend. Aki (egyébként takarékos módon) nem írja ki a bevitt vektorok koordinátáit, esetleg megfeledkezhet a sorcseréről. Aki bízik a memóriájában és a számolásában, nem köteles ellenőrizni. Aki viszont szeretné ellenőrizni, hogy a kapott X mátrix tényleg kétoldali inverze-e a négyzetes A-nak, annak elég AX és XA közül az egyiket kiszámolni, hisz a tétel alapján: Ha egy **négyzetes** mátrixnak van egyik oldali inverze, akkor az másik oldali is!
A négyzetes mátrixok között több olyan mátrix típus van, amely valamilyen számolás elvégzését megkönnyíti.
A következő $n \times n$-es mátrix neve diagonális mátrix: $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$. Itt a nemnulla elemek csak a főátlóban lehetnek (egy elem akkor van a főátlóban, ha a sorindexe és az oszlopindexe megegyezik), de a főátlóban is lehetnek nullák tetszőleges számban. Az $n \times n$-es diagonális mátrixokkal könnyű számolni, mert két ilyen diagonális mátrixot úgy lehet összeszorozni, hogy a megfelelő diagonális elemeket összeszorozzuk. Más mátrixoknál ez nem ilyen kellemes, de mégis örülünk, ha az alak legalább félig olyan, mint a diagonálisnál. Egy négyzetes mátrixot felső háromszög mátrixnak szokás hívni, ha a főátlója alatt mindenütt nulla van. Az alsó háromszög mátrixban pedig a főátló felett van mindenütt nulla. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetére megemlítünk még néhány speciális fajtát: A szimmetrikus, ha $A^\top = A$; A antiszimmetrikus, ha $A^\top = -A$; A projektor mátrix, ha $A^2 = A$; A nilpotens mátrix, ha van olyan k pozitív egész, melyre $A^k = \mathbf{0}$; A invertálható mátrix, ha van kétoldali inverze.
A mátrixok rangjával kapcsolatos vizsgálatok során kiderült még becslés összeg és szorzat rangjára is. A 5. gyakorlat 6. feladatából következik pl., hogy $A, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ esetén $\varrho(A+B) \leqq \varrho(A) + \varrho(B)$. A 7/3 oldali tételből következik, hogy $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ esetén $\varrho(AB) \leqq \varrho(A)$. Igaz ennek a párja is: $\varrho(AB) \leqq \varrho(B)$ [biz: $\varrho(AB) = \varrho((AB)^\top) = \varrho(B^\top A^\top) \leqq \varrho(B^\top) = \varrho(B)$].
Mindeddig csak $\mathbb{R}$ feletti vektortereket és mátrixokat néztünk, legfőképpen azért, hogy elkerüljük a komplex számokkal kapcsolatos esetleges nehézségeket. Rövidesen azonban használnunk kell $\mathbb{C}$ (a komplex számtest) feletti mátrixokat is, itt az alkalom hozzászokni. Használjuk egy $a+bi$ alakú ($a, b \in \mathbb{R}$) komplex szám konjugáltját: $\overline{a+bi} = a - bi$. A következő definícióban a mátrixunk elemei komplex számok lesznek, ezért az indexeknél kerüljük az i használatát. (A mátrixműveletek a korábbi mintára definiálandók.)
DEFINÍCIÓ: $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$ esetén az A mátrix adjungáltja: $A^* \in \mathbb{C}^{m\times n}$, melyre minden szóbajövő j,k-ra ${}_j[A^*]_k = \overline{{}_k[A]_j}$.
A 7/1 oldali tétel mintájára igazolható a következő tétel.
TÉTEL (Az adjungálás kapcsolata a mátrixműveletekkel):
$A,\ B \in \mathbb{C}^{n\times m} \Rightarrow (A+B)^* = A^* + B^*$;
$\lambda \in \mathbb{C},\ A \in \mathbb{C}^{n\times m} \Rightarrow (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$;
$A \in \mathbb{C}^{n\times m},\ B \in \mathbb{C}^{m\times k} \Rightarrow (AB)^* = B^* A^*$.