2008. október 20/21.

Lineáris algebra (A, B, C)
7. előadás
(vázlat)

Emlékeztető:
DEFINÍCIÓ: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ esetén $AB \in \mathbb{R}^{n\times k}$ úgy, hogy minden szóbajövő i, j-re (most $1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq k$)

$$_i[AB]_j = \sum_{\ell=1}^{m} {}_i[A]_\ell\, {}_\ell[B]_j.$$

Beígértük már a mátrixszorzás asszociativitását és a disztributivitásokat, de a pontos kimondás előtt célszerű egyszerűbb dolgokon gyakorolni a mátrixszorzást.

DEFINÍCIÓ: $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ az $n \times n$-es egységmátrix, $\;{}_i[I_n]_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1\,, & \text{ha } i = j; \\ 0\,, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$ (A δ_{ij} egyik szokásos elnevezése: Kronecker-szimbólum.)

Az egységmátrix elnevezést az indokolja, hogy az I_n a szorzásnál minden olyan mátrixot változatlanul hagy, amellyel az adott sorrendben össze lehet szorozni:
TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ esetén $I_n A = A$ és $A I_m = A$.
[Az első állítás igazolásánál először vegyük észre, hogy $I_n A$ értelmezve van, és $n \times m$-es, mint az A; ezután nézzük minden szóbajövő i, j esetére az i-edik sor j-edik elemét:

$$_i[I_nA]_j = \sum_{\ell=1}^{n} {}_i[I_n]_\ell\, {}_\ell[A]_j = \sum_{\ell=1}^{n} \delta_{i\ell} a_{\ell j} = \delta_{ii} a_{ij} = a_{ij} = {}_i[A]_j.$$

A másik állítás hasonlóan igazolható.]
A szorzás kommutativitásának hiányában igen fontos szerepe lesz a transzponálásnak:
DEFINÍCIÓ: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ esetén az A mátrix transzponáltja: $A^\top \in \mathbb{R}^{m\times n}$, melyre minden szóbajövő i, j-re ${}_i[A^\top]_j = {}_j[A]_i$.
TÉTEL (A transzponálás kapcsolata az eddigi műveletekkel):
$A, B \in \mathbb{R}^{n\times m} \Rightarrow (A + B)^\top = A^\top + B^\top$;
$\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times m} \Rightarrow (\lambda A)^\top = \lambda A^\top$;
$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k} \Rightarrow (AB)^\top = B^\top A^\top$.
[Csak az utolsó állítás bizonyítása szorul részletezésre: a létezés és az alakok egyezése rögtön látszik [épp fordítva volna zűrös], továbbá minden szóbajövő i, j-re

$$_i[(AB)^\top]_j = {}_j[AB]_i = \sum_{\ell=1}^{m} {}_j[A]_\ell\, {}_\ell[B]_i =$$

$$\sum_{\ell=1}^{m} {}_\ell[A^\top]_j\, {}_i[B^\top]_\ell = \sum_{\ell=1}^{m} {}_i[B^\top]_\ell\, {}_\ell[A^\top]_j = {}_i[B^\top A^\top]_j,$$

hisz számok szorzásának sorrendjét szabad cserélnünk.]

A mátrixszorzás asszociativitásának vizsgálatánál azt is tisztáznunk kell, hogy melyik oldal mikor létezik!
TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{n\times m_1}$, $B \in \mathbb{R}^{m_2\times k_2}$, $C \in \mathbb{R}^{k_3\times s}$ esetén

$$\exists\,(AB)C \Leftrightarrow \underbrace{\{m_1 = m_2 \text{ és } k_2 = k_3\}} \Leftrightarrow \exists\, A(BC)$$
$$\Downarrow$$
$$(AB)C = A(BC).$$

[A létezésekkel kapcsolatos állítások a mátrixszorzás definíciójából adódnak.
$\Downarrow$: $m_1 = m_2 (= m)$ és $k_2 = k_3 (= k)$ esetén $(AB)C$, $A(BC) \in \mathbb{R}^{n\times s}$, továbbá minden szóbajövő i, j-re

$${}_i[(AB)C]_j = \sum_{p=1}^{k} {}_i[AB]_p\, {}_p[C]_j = \sum_{p=1}^{k}\Big(\sum_{q=1}^{m} {}_i[A]_q\, {}_q[B]_p\Big)_p[C]_j = \sum_{q=1}^{m}\sum_{p=1}^{k} {}_i[A]_q\, {}_q[B]_p\, {}_p[C]_j =$$

$$\sum_{q=1}^{m} {}_i[A]_q\Big(\sum_{p=1}^{k} {}_q[B]_p\, {}_p[C]_j\Big) = \sum_{q=1}^{m} {}_i[A]_q\, {}_q[BC]_j = {}_i[A(BC)]_j,$$

tehát $(AB)C = A(BC)$.]
TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{n\times m_1}$, $B \in \mathbb{R}^{m_2\times k_2}$, $C \in \mathbb{R}^{m_3\times k_3}$ esetén

$$\exists\, A(B+C) \Leftrightarrow \underbrace{\{m_1 = m_2 = m_3 \text{ és } k_2 = k_3\}} \Leftrightarrow \exists\, AB + AC$$
$$\Downarrow$$
$$A(B+C) = AB + AC.$$

[A bizonyítás a fenti minta alapján nem okozhat gondot.]
HF: A másik disztributivitás kimondása.
TÉTEL: $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k} \Rightarrow \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
[A bizonyítás triviális.]

Most tekintsünk egy $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mátrixot, s osszuk fel néhány részre vizszintesen is, függőlegesen is (pl. vizszintesen két részre, függőlegesen három részre, feltéve, hogy $n \geqq 2$ és $m \geqq 3$):

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

Azt mondjuk, hogy így az A mátrixot partícionáltuk, vagy blokkokra bontottuk, ahol a blokkok maguk is mátrixok, mégpedig olyan méretűek, hogy az egy sorban elhelyezkedő blokkok ugyanannyi sorból állnak, az egy oszlopban lévők pedig ugyanannyi oszlopot tartalmaznak. Blokkokra bontott mátrixok közötti műveletek sokszor áttekinthetőbben végezhetők el. Ehhez pl. a mátrixösszeadásnál nyilván azonos módon kell partícionálni az összeadandó mátrixokat, sokkal fontosabb azonban a mátrixszorzás áttekinthetősége: itt az lehet a cél, hogy a blokkokra bontott mátrixokat esetleg úgy szorozhassuk össze, mintha számmátrixok volnának (a szorzás során azonban a tényezők sorrendjét tilos változtatni, hisz a mátrixszorzás nem kommutatív). Ez a cél el is érhető, mindössze azt kell biztosítanunk, hogy a megfelelő blokkok összeszorozhatók legyenek. Legyen most $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$, és tekintsük a következő partícionálásukat:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} \wedge & \quad\sqcap & \quad\Yup \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} < \\ \sqsubset \\ \prec \end{array} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix}$$

A fenti példában a hasonló jellel jelzett méretek megegyezése (az összeszorozhatóságnál szereplő m sorrendben is azonos felbontása pozitív egészek összegére) elég ahhoz, hogy a szorzást úgy végezhessük, mintha számmátrixokról lenne szó, s a szorzatmátrixnak négy blokkja lesz:

$$\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + A_{13}B_{31} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} + A_{23}B_{31} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} + A_{23}B_{32} \end{bmatrix}$$

A fentiek jogosságát általában nem bizonyítjuk, de szabad használni a mátrixszorzás áttekinthetőbbé tételére, s ha valakinek kétsége támadna, egy konkrét esetet mindig könnyű ellenőrizni.

Most az $\mathbb{R}^n$ triviális bázisát használva az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ definíciójában (5/3), megkapjuk az $A = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nm} \end{bmatrix}$ mátrix oszlopvektorokra való partícionálását:

$A = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m] \in \mathbb{R}^{n\times m}$, melyre tetszőleges $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ esetén teljesül, hogy $A\mathbf{x} = \mathbf{a}_1 x_1 + ... + \mathbf{a}_m x_m$, így leolvasható $A\mathbf{x} \in \langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m \rangle$ is.

Az oszlopvektorrendszer rangjának segítségével definiálhatjuk tetszőleges mátrix oszloprangját, majd sorrangját:

DEFINÍCIÓ: $A = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ oszloprangja: $\varrho_{\mathcal{O}}(A) = r(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m)$ (emlékeztető: $= \dim\langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m \rangle$); sorrangja pedig $\varrho_{\mathcal{S}}(A) = \varrho_{\mathcal{O}}(A^\top)$.

Rövidesen be fogjuk bizonyítani, hogy tetszőleges A mátrix oszloprangja és sorrangja megegyezik. Ennek egyik segédeszköze (s egyúttal a partícionálás egy természetes alkalmazása) szorzat oszloprangjának vizsgálata:

TÉTEL: Legyenek $C = [\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_m]$ és $D = [\mathbf{d}_1, ..., \mathbf{d}_k]$ ebben a sorrendben összeszorozható $\mathbb{R}$ feletti mátrixok. Ekkor $\varrho_{\mathcal{O}}(CD) \leqq \varrho_{\mathcal{O}}(C)$.

[A bizonyítás egyetlen ötlete, hogy először csak a D partícionálását írjuk be: $CD = C[\mathbf{d}_1, ..., \mathbf{d}_k] = [C\mathbf{d}_1, ..., C\mathbf{d}_k]$. Mivel $C\mathbf{d}_i \in \langle \mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_m \rangle$ $(i = 1, ..., k)$, ezért teljesül az is, hogy $\langle C\mathbf{d}_1, ..., C\mathbf{d}_k \rangle \subseteqq \langle \mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_m \rangle$, az utóbbiak dimenzióira vonatkozó egyenlőtlenség pedig már a bizonyítandó állítás.]

Az oszloprang és sorrang egyenlőségéhez még szükségünk lesz mátrixunk egy alkalmas felbontására két mátrix szorzatára, ezt a lineáris egyenletrendszer vizsgálatánál még nem teljesen tisztázott általános megoldás áttekintésével együtt tárgyaljuk. Az elemi bázistranszformáció segítségével már el tudtuk dönteni a megoldhatóságot, meg tudtuk határozni a megoldásszámot, s megoldhatóság esetén a táblázat segítségével meg is tudtunk adni egy megoldást. Ha azonban végtelen sok megoldás van, ezek áttekintése még nem történt meg (konkrét esetekben a Gauss-eliminációval ez világos, de általában a szabad változók száma és szerepe nehezebben látható). A korábbi jelölésekkel (5/4) – mivel az $r = 0$ eset triviális –, azzal a feltevéssel dolgozunk, hogy van megoldás és $0 < r < m$.

INDEXCSERÉVEL (azaz az A oszlopai sorrendjének s egyúttal az ismeretlenek sorrendjének megváltoztatásával) elérhetjük, hogy a bevitt vektorok $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_r$ legyenek [a végső formula után persze vissza kell cserélni].