2008. október 13/14.

Lineáris algebra (A, B, C)
6. előadás
(vázlat)

Az 5. előadás végét (lineáris egyenletrendszer) kiegészíthetjük a következő észrevétellel: A megoldásszám: 0 vagy 1, ha $r = m$; 0 vagy ∞, ha $r < m$.

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett a $+, \lambda\cdot$ műveletekre, s pótlólag igazoljuk az 5. előadásban bizonyítás nélkül említett tételek többségét némi kiegészítéssel:
Ha $V = \{\mathbf{0}\}$, akkor nincs benne független rendszer, így bázis sincs. Bizonyítás nélkül megemlítjük, hogy $V \neq \{\mathbf{0}\}$ esetén létezik bázis V-ben. A bizonyítást a halmazelméleti segédeszközök hiánya miatt kell mellőznünk. Csak arra az esetre fogunk szorítkozni, amikor V-ben van véges generátorrendszer, ilyenkor azt mondjuk, hogy a V „végesdimenziós" (az egybeírás szándékos, a félreértések elkerülését szolgálja).
TÉTEL: Ha $V \neq \{\mathbf{0}\}$ és V-ben van véges generátorrendszer (V „végesdimenziós"), akkor létezik bázis V-ben, sőt bármely véges generátorrendszerből kiválasztható bázis.
[Bizonyítás: Legyen $\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_m$ egy véges generátorrendszer. Ha ez L, akkor máris B. Ha viszont Ö és legalább 2 eleme van, akkor van olyan eleme, pl. $\mathbf{g}_i$, amelyik lineárisan függ a többitől. Így erre valójában nincs szükség a generáláshoz: ha $\mathbf{v}$ kifejezhető $\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_i, ..., \mathbf{g}_m$ lineáris kombinációjaként, akkor tudván, hogy $\mathbf{g}_i$ kifejezhető $\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{i-1}$, $\mathbf{g}_{i+1}, ...\mathbf{g}_m$-mel, már $\mathbf{v}$ is kifejezhető ezekkel. Kiderült tehát, hogy $\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{i-1}, \mathbf{g}_{i+1}, ...\mathbf{g}_m$ generátorrendszer. Most erre alkalmazhatjuk a fenti gondolatmenetet, és így tovább, mindaddig, amíg legalább 2 elemünk van. Ha egyik lépésben sem jutottunk bázishoz, akkor végül egyelemű generátorrendszerünk adódik, pl. $\mathbf{g}_t$. Ekkor ez lesz bázis, mert $\mathbf{g}_t \neq \mathbf{0}$ (a $\mathbf{0}$ nem generálja V-t, hisz $V \neq \{\mathbf{0}\}$).]
A fenti bizonyításban tulajdonképpen minimális generátorrendszert kerestünk (amiből akármelyik vektort elhagyva már nem kapunk generátorrendszert), s erről derült ki, hogy bázis. Természetes bizonyítási útnak tűnik maximális lineárisan független vektorrendszer keresése is, itt azonban még a „végesdimenziós" esetben is problematikus, hogy leáll-e a keresés, nincs-e véletlenül végtelen sok elemű független rendszer. Ezt a következő tétellel ki fogjuk zárni, s végre összehasonlíthatjuk a bázisok elemszámát is. „Kicserélési" tételek következnek, azért kettő, mert egy L és egy G között két irányba lehet cserélni. A következőkben a k, m indexek pozitív egészek; ha ettől eltérnénk, azt külön jelezzük.
1. SZÁMÚ KICSERÉLÉSI TÉTEL: Legyen $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ L; $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_m$ G V-ben. Ekkor
α) $\exists j \in \{1, ..., m\} : \mathbf{b}_j, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ L $\quad \beta$) $k \leqq m$ (azaz $|\mathrm{L}| \leqq |\mathrm{G}|$).
[Bizonyítás: α): A $k = 1$ eset triviális ($\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$ miatt $V \neq \{\mathbf{0}\}$). $k \geq 2$ esetén pedig tegyük fel, hogy minden j rossz, azaz $\forall j \in \{1, ..., m\}$ $\mathbf{b}_j, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ Ö. Itt az $\mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ L (hisz $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ L), tehát $\mathbf{b}_j$ lineárisan függ $\mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$-tól $j = 1, ..., m$-re. De így $\mathbf{a}_1$ is lineárisan függ $\mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$-tól, hisz a generátorrendszerrel kifejezhető. Így ellentmondás adódott $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ L-lel. β): Az α rész nemcsak az L első elemére érvényes, egymás után alkalmazva (a G mindig ugyanaz, az L pedig az előző eredmény), adódik
$(\mathbf{b}_j =)\mathbf{b}_{j_1}, \mathbf{b}_{j_2}, ..., \mathbf{b}_{j_k}$ L. Az L miatt ez k darab **különböző** elem a G-ből, így $m \geq k$.]
Következményként kapjuk a báziselemszámok összehasonlítását:
TÉTEL: Ha $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ bázisok V-ben, n pozitív egész, $|\mathrm{B}_1| = n$, akkor B_2 is véges és $|\mathrm{B}_2| = n$.
[Bizonyítás: Ha B_2 végtelen volna, akkor volna benne $n+1$ elemű részrendszer, másrészt ez L, $n + 1 = |\mathrm{L}| \leqq |\mathrm{B}_1| = n$ pedig ellentmondás. Az 1. számú kicserélési tétel β részét L: B_1, G: B_2 szereposztással alkalmazva $|\mathrm{B}_1| \leqq |\mathrm{B}_2|$ adódik, majd felcserélt szerepekkel a fordított egyenlőtlenséget kapjuk.]

DEFINÍCIÓ: **Az $\mathbb{R}$ feletti V vektortér dimenziója**:

$$\dim V = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } V = \{\mathbf{0}\}\,; \\ \text{egy tetszőleges B elemszáma}, & \text{ha } V \neq \{\mathbf{0}\} \text{ és van véges G } V\text{-ben}\,; \\ \infty & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Megjegyezzük, hogy a definíció harmadik része számosságfogalom ismeretében finomítható |B|-ra, azaz báziselemhalmaz számosságára.

A definíció alapján a térvektorok szokásos $\mathbb{R}$ feletti terének 3 a dimenziója, a rendezett valós szám n-esek szokásos $\mathbb{R}$ feletti vektorterének pedig n a dimenziója. Ha viszont tekintjük az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények szokásos $\mathbb{R}$ feletti vektorterében a polinomfüggvények alterét, erről könnyen belátható, hogy nincs véges generátorrendszere (összeadás és skalárral való szorzás során a fokszám nem nőhet), így dimenziója ∞.

DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m$ **vektorrendszer rangja** az általuk generált altér dimenziója: $r(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m) = \dim\langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m \rangle$ (az r helyén használatos a ρ illetve ϱ is.)

Ha dim $V = n > 0$, akkor V-ben tetszőleges B, L, illetve G-re $|\mathrm{B}| = n$, $|\mathrm{L}| \leqq n$, $|\mathrm{G}| \geqq n$. Utóbbiaknál egyenlőség természetesen lehet, pl. bázisokra, de rövidesen belátjuk, hogy csak bázisokra. Ha $|\mathrm{G}| = n$, akkor, tudván, hogy G-ből kiválaszható B, mely viszont csak n elemű lehet, G maga B. Az L-re is érvényes hasonló állítás, de ezt inkább a G elemeit L elemeire kicserélő tétel keretében mondjuk ki.

2. SZÁMÚ KICSERÉLÉSI TÉTEL: Legyen $\dim V = n > 0$; $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ L; $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_m$ G V-ben. Ekkor

α) $\exists\, j_1, ..., j_s \in \{1, ..., m\}$ [itt $s \geqq 0$] : $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_{j_1}, ..., \mathbf{b}_{j_s}$ B V-ben.

β) $m = n$ esete: Ekkor G helyett B lesz, s az így adódó állítás szerepel kicserélési tételként Gyapjas Ferenc: Lineáris algebra és geometria c. jegyzetében.

γ) Lineárisan független rendszer kiegészíthető bázissá.

δ) $|\mathrm{L}| = n$ esetén az L B is.

[Csak az α részt kell igazolnunk, a többi ebből következik. Az α rész igazolásához először jegyezzük meg, hogy ha netán $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ G is, akkor készen vagyunk [itt $s = 0$]. Ha meg nem G, akkor van olyan $\mathbf{b}_{j_1}$, amit nem állítanak elő. Ezt hozzávéve a rendszerhez, L-et kapunk a mai első tétel alapján. Ezután újra nézhetjük a G ill. nem G eseteket, s most azt is tudjuk, hogy ez az eljárás $s = n - k$ lépés után leáll, hisz n-nél több elem nem lehet egy lineárisan független rendszerben n dimenziós vektortér esetén, n-nél kevesebb elemű vektorrendszer meg nem lehet bázis. [Aki a dimenzióról hajlamos megfeledkezni, az inkább úgy olvassa pl. a δ részt, hogy dimenziónyi elemszámú L B is.]]

Az elemi bázistranszformáció kiinduló táblázatából (5/4) most emeljük ki az adatokat tartalmazó részt, s a $[\mathbf{b}]_{\mathbf{e}}$-hez hasonlóan tegyük szögletes zárójelbe:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

A második az $\mathbb{R}^n$ egy eleme, $m = 1$ esetén az első is ilyen, természetes tehát az általánosítás: az eddigi 1 oszlop helyett m oszlop, mindegyikben egy-egy valós szám n-es. Az így kapott téglalap alakú elrendezéseket mátrixoknak hívjuk, az első példában n sor és m oszlop van, ez egy $n \times m$-es mátrix, a másodikra pedig azt mondjuk, hogy $n \times 1$-es mátrix. (A $\times$ jel az elválasztás céljából szerepel, mert nem mindegy, hogy 2×3 vagy 3×2 alakú mátrixunk van.) Tehát:

DEFINÍCIÓ: Legyenek adottak az n és m pozitív egész számok, továbbá minden $i \in \{1, ..., n\}$ és $j \in \{1, ..., m\}$ esetére az a_{ij} valós számok. Az $\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$ táblázatot egy $\mathbb{R}$ feletti mátrixnak nevezzük, s A-val jelöljük, részletesebben $A = [a_{ij}]_{n \times m}$, vagy $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$, az A mátrix i-edik sora j-edik elemének jelölése: a_{ij} vagy ${}_i[A]_j$.
Az A és a B mátrixok egyenlők, ha alakjuk azonos (mondjuk $n \times m$-es) és a megfelelő elemeik megegyeznek, azaz minden „szóbajövő" i, j párra ($1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq m$) teljesül, hogy ${}_i[A]_j = {}_i[B]_j$. Az $\mathbb{R}$ feletti $n \times m$-es mátrixok halmazát $\mathbb{R}^{n \times m}$-mel jelöljük ($\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$).
Az $\mathbb{R}^n$-ben definiált komponensenkénti összeadás és valós számmal való szorzás (3/1-2) mintájára természetes módon kínálkoznak $n \times m$-es mátrixok esetén a megfelelő elemek összeadásával illetve az összes elemnek egy valós számmal szorzásával a következő műveletek:
$+ : \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^{n \times m}$, $\quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ esetén $A + B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ és minden szóbajövő i, j-re ${}_i[A + B]_j = {}_i[A]_j + {}_i[B]_j$.
$\lambda\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^{n \times m}$, $\quad \lambda \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ esetén $\lambda A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ és minden szóbajövő i, j-re ${}_i[\lambda A]_j = \lambda\, {}_i[A]_j$.
TÉTEL: $\mathbb{R}^{n \times m}$ vektortér az $\mathbb{R}$ felett a fenti $+$, $\lambda\cdot$ műveletekre nézve, $\dim \mathbb{R}^{n \times m} = nm$.
[A vektortéraxiómák teljesülésének nem nehéz az ellenőrzése, pl. az I./4-et teljesítő ún. nullmátrix: $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$. Az $\mathbb{R}^n$ triviális bázisa (4/1-2) mintájára most is könnyen találhatunk bázist: nm darab különböző olyan mátrix megfelel, ahol egy helyen 1, az összes többi helyen 0 áll.]

Mátrixszorzás

Most szorozni próbálunk mátrixokat, itt azonban nem a természetesség, hanem az alkalmazhatóság a fő szempont. Az

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}$$

lineáris egyenletrendszerhez hozzárendelhetjük a következő mátrixokat:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Most úgy szeretnénk mátrixszorzást definiálni, hogy a fenti lineáris egyenletrendszer ekvivalens legyen az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mátrixegyenlettel. Ha sikerül, akkor ez lesz a lineáris egyenletrendszer mátrix-alakja. Ezek szerint nem éppen azonos alakú mátrixokat kívánunk szorozgatni: a tervezett bal oldalon egy $n \times m$-es és egy $m \times 1$-es mátrix van, a jobb oldalon pedig egy $n \times 1$-es mátrix, s az A mátrix i-edik sorának elemeit rendre összeszorozzuk az $\mathbf{x}$ (egyetlen) oszlopának elemeivel: az elsőt az elsővel, a másodikat a másodikkal, ..., az utolsót az utolsóval [egyik sem fogy el hamarabb, mindkettőből m darab van!], végül a kapott szorzatokat összeadjuk, ez lesz a $\mathbf{b}$ (egyetlen) oszlopának i-edik eleme.

Ha ezt látjuk, akkor már a további általánosítás természetes: 1 oszlop helyett k oszlop szerepeltetésénél csak az „(egyetlen)"-t kell mindkétszer kicserélni „j-edik"-re:
DEFINÍCIÓ: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ esetén $AB \in \mathbb{R}^{n\times k}$ úgy, hogy minden szóbajövő i, j-re (most $1 \leqq i \leqq n$, $1 \leqq j \leqq k$)

$$_i[AB]_j = \sum_{\ell=1}^{m} {}_i[A]_\ell \, {}_\ell[B]_j.$$

Ez az ún. sor–oszlop szorzás: a szorzatmátrix i-edik sora j-edik elemét úgy kapjuk, hogy a bal oldali mátrix i-edik sorának és a jobb oldali mátrix j-edik oszlopának megfelelő elemeit összeszorozzuk, s a kapott szorzatokat összeadjuk.
Az összeszorozhatóság méretfeltételei alapján persze nem számíthatunk kommutatív műveletre: lehet, hogy AB értelmezve van (A oszlopainak száma megegyezik B sorainak számával), de BA nincs értelmezve. De ez még nem a fő baj: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ esetén létezik AB is, BA is, csakhogy az első $n \times n$-es, a második $m \times m$-es, tehát $n \neq m$ esetén biztosan nem lehetnek egyenlők. Az igazi gond az, hogy általában még $n = m$ esetén sem lesznek azonosak, pedig az alak már rendben volna. Az $n = 2$ esetre nézzük a következő példát: Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ekkor $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, tehát értelmezve van AB is, BA is, mindkettő 2×2-es, de $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, tehát $AB \neq BA$. Mondhatnánk, hogy ez nem új, hiszen a vektoriális szorzat sem volt kommutatív, de ott (2/3) legalább volt egy egyszerű kapcsolat a két szorzat között. Most ez nincs, hisz a fenti példában $B = AB \neq BA = \mathbf{0}$. Egyúttal azt is látjuk, hogy két nullmátrixtól különböző mátrix szorzata adhat nullmátrixot, de nem biztos, hogy más sorrendben is ezt ad.
Ezek után talán meglepő lehet, hogy a fenti sor–oszlop szorzás asszociatív és az összeadással disztributív kapcsolatban áll, majd nemsokára pontosan meg is fogalmazzuk ezeket. [Aki már találkozott más lineáris algebrai felépítéssel, esetleg a sor–sor, oszlop–oszlop, oszlop–sor szorzást is meg tudja fogalmazni, de csalódni fog: ezek egyike sem kommutatív, sőt még csak nem is asszociatív.] Később mátrixokat fogunk használni bizonyos transzformációk leírására. Aki ezt meglepőnek találja, megnézheti a manapság mindenhol használt Postscript nyelv reference manuálját:
http://www.adobe.com/products/postscript/pdfs/PLRM.pdf
A 187–188. oldalon kiderül, hogy mátrixokkal adja meg azokat a koordinátatranszformációkat, amiket használ (például, amikor a lapon egy ábrát forgatni, tükrözni, egy betűt dönteni kell).