2008. október 6/7.

Lineáris algebra (A, B, C)
5. előadás
(vázlat)

A V vektortér altereit keresve, a triviális $\{\mathbf{0}\}$ és V példáján kívül sok egyebet nyerhetünk a lineáris függés fogalmának bevezetésével, itt azonban egyrészt célszerű végtelen vektorrendszert is megengednünk, másrészt egy vektorrendszerben lehet több azonos vektor is, a szokott $\subseteqq$ azonban csak különböző elemeket engedne meg. Ezen a „$\subseteqq$" jellel segítünk:
DEFINÍCIÓ: Az A „$\subseteqq$" V jelentse azt, hogy $\mathbf{a} \in A \Rightarrow \mathbf{a} \in V$ (de itt csak egyszer!).
DEFINÍCIÓ: $\emptyset \neq A$ „$\subseteqq$" V és $\mathbf{v} \in V$ esetén azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ lineárisan függ az A-tól, ha a $\mathbf{v}$ előállítható valamely véges sok A beli vektor valós együtthatós lineáris kombinációjaként.
A lineáris függés és a lineáris összefüggés kapcsolatát mutatja a következő két állítás.
TÉTEL: $k \geqq 2$, $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in V$ esetén
$\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ Ö $\Leftrightarrow \exists\, \mathbf{a}_i$, ami lineárisan függ az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, ..., \mathbf{a}_k$ vektorrendszertől.
[Biz: $\Rightarrow$: Az Ö definícióját felírva, bármelyik olyan $\mathbf{a}_i$ megfelel, amelynek nullától különböző együtthatója van, az ilyen $\mathbf{a}_i$-t ki lehet fejezni a többivel. $\Leftarrow$: Az $\mathbf{a}_i$-t -1 együtthatóval, a többit az adott lineáris kombinációbeli együtthatóval véve egy nullvektort adó nemtriviális lineáris kombinációt nyerünk.]
TÉTEL: $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k, \mathbf{b} \in V$; $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ L és $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k, \mathbf{b}$ Ö esetén $\mathbf{b}$ lineárisan függ az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$-tól.
[Az előző tétel alapján világos, hogy az Ö definícióját felírva, azt kellene belátnunk, hogy $\mathbf{b}$ együtthatója nullától különbözik. Valóban, ha nulla volna, akkor $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ Ö, ami most ellentmondás.]

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett a $+, \lambda\cdot$ műveletekre, s megállapodtunk a következőben: $\mathbf{a}\lambda = \lambda\mathbf{a}$. Először (pótlólag, ahogy ígértük) igazoljuk, hogy összeg tetszőlegesen zárójelezhető.
TÉTEL: Legyen $k \geqq 1$; $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k \in V$. Ekkor az $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + ... + \mathbf{a}_k$ egy tetszőleges zárójelezése $= ((...((\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_3) + ...) + \mathbf{a}_{k-1}) + \mathbf{a}_k$.
[Bizonyítás: A bizonyítást a tagszám szerinti teljes indukcióval végezhetjük, de a legáltalánosabb indukciós feltevésre lesz szükségünk. Először tisztázzuk a kis k esetét: $k = 1$ esetén $\mathbf{a}_1$, $k = 2$ esetén $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ az összes lehetőség, $k = 3$ esetén két lehetőség van, melyek az I./3. szerint egyezők: $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)$. Legyen most $k > 3$, és tegyük fel, hogy érvényes az állítás minden olyan összegre, amely k-nál kevesebb tagból áll. A k tagú összeg egy tetszőleges zárójelezésében keressük meg az utolsó összeadást, ekkor ilyen kifejezésünk lesz alkalmas s-re: ($\mathbf{a}_1 + ... + \mathbf{a}_s$ valamely zárójelezése) $+$ ($\mathbf{a}_{s+1} + ... + \mathbf{a}_k$ valamely zárójelezése). Itt $1 \leqq s \leqq k-1$ és $1 \leqq k-s \leqq k-1$, tehát mindkét zárójeles részben k-nál kevesebb tagú összegek valamilyen zárójelezése szerepel. Az indukciós feltevés szerint a fenti kifejezés a hangsúly kedvéért módosított zárójelekkel $= \{((...((\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)+\mathbf{a}_3)+...)+\mathbf{a}_{s-1})+\mathbf{a}_s\}+[\{(...((\mathbf{a}_{s+1}+\mathbf{a}_{s+2})+\mathbf{a}_{s+3})+...)+\mathbf{a}_{k-1}\}+\mathbf{a}_k]$. $s = k-1$ esetén már kész is vagyunk, $s < k-1$ esetén pedig I./3-at alkalmazva $= [\{((...((\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)+\mathbf{a}_3)+...)+\mathbf{a}_{s-1})+\mathbf{a}_s\}+\{(...((\mathbf{a}_{s+1}+\mathbf{a}_{s+2})+\mathbf{a}_{s+3})+...)+\mathbf{a}_{k-1}\}]+\mathbf{a}_k$ adódik, ahol a szögletes zárójelben lévő $k-1$ tagra újra alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, s végre a kívánt alakhoz jutunk.]
A nehéz bizonyítás után pihentető lehet a „kivonás"-t biztosító tétel.
TÉTEL: $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V\, \exists!\, \mathbf{x} \in V : \mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$.
[Bizonyítás: !: Tegyük fel, hogy $\mathbf{x} \in V$ olyan, hogy $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Ekkor $\mathbf{x} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = ((-\mathbf{a}) + \mathbf{a}) + \mathbf{x} = (-\mathbf{a}) + (\mathbf{a} + \mathbf{x}) = (-\mathbf{a}) + \mathbf{b}$.

$\exists$: $\mathbf{a}+((-\mathbf{a})+\mathbf{b})=(\mathbf{a}+(-\mathbf{a}))+\mathbf{b}=\mathbf{0}+\mathbf{b}=\mathbf{b}$.]
A bizonyítás alapján $\mathbf{b}-\mathbf{a}$-val jelölhetjük az $\mathbf{a}+\mathbf{x}=\mathbf{b}$ vektoregyenlet egyértelmű megoldását: $\mathbf{b}-\mathbf{a}=(-\mathbf{a})+\mathbf{b}=\mathbf{b}+(-\mathbf{a})=\mathbf{b}+(-1)\mathbf{a}$.
A bázis (B) definíciójánál említettük, hogy az L az egyértelműség igazolásához kell majd:
TÉTEL: $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ B V-ben, $\mathbf{a}\in V \Rightarrow \exists!\,\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{R}\,:\,\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{e}_1+...+\alpha_n\mathbf{e}_n$.
[A létezés a definícióból adódik. !: Tegyük fel, hogy $\mathbf{a}=\alpha_1'\mathbf{e}_1+...+\alpha_n'\mathbf{e}_n=\alpha_1''\mathbf{e}_1+...+\alpha_n''\mathbf{e}_n$. Ekkor $(\alpha_1'-\alpha_1'')\mathbf{e}_1+...+(\alpha_n'-\alpha_n'')\mathbf{e}_n=\mathbf{0}$. Az $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ L, így minden zárójelben nulla áll.]
Érdemes kimondani a megfordítást is:
TÉTEL: Ha $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n\in V$ olyan, hogy $\forall\mathbf{a}\in V\,\exists!\,\alpha_1,...,\alpha_n\in\mathbb{R}\,:\,\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{e}_1+...+\alpha_n\mathbf{e}_n$, akkor $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ bázis V-ben.
[L abból adódik, hogy $\mathbf{a}=\mathbf{0}$-ra az egyértelműség szerint a $\mathbf{0}$-t CSAK triviálisan állítja elő az $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$.]

DEFINÍCIÓ: $\emptyset\neq A$ „$\subseteqq$" V esetén $W(A)=\{\mathbf{v}\,|\,\mathbf{v}\in V,\ \mathbf{v}\,\text{lineárisan függ}\ A\text{-tól}\}$.
TÉTEL: Tetszőleges $\emptyset\neq A$ „$\subseteqq$" V esetén $W(A)\leqq V$, továbbá A „$\subseteqq$" $W(A)$.
[Bizonyítás: A korábbi tételünk 1., 2., 3. feltételét kell ellenőriznünk.
1.: $\exists\mathbf{a}\in A$, de $\mathbf{a}\in A$ esetén $\mathbf{a}=1\mathbf{a}\in W(A)$, így egyúttal A „$\subseteqq$" $W(A)$ is kész.
2.: A $W(A)$ tetszőleges két eleme véges sok A beli vektor lineáris kombinációjaként írható, mégpedig elérhető, hogy ugyanazon véges sok vektoré: ha egy A beli vektor csak az egyik lineáris kombinációban fordulna elő, akkor a másikba is beírjuk 0 együtthatóval. Így a két vektor: $\alpha_1\mathbf{a}_1+...+\alpha_k\mathbf{a}_k$ illetve $\beta_1\mathbf{a}_1+...+\beta_k\mathbf{a}_k$ alakú, ahol $\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k\in A$, az együtthatók pedig valós számok. Ekkor az összegük: $(\alpha_1+\beta_1)\mathbf{a}_1+...+(\alpha_k+\beta_k)\mathbf{a}_k\in W(A)$.
3.: Ha $\alpha_1\mathbf{a}_1+...+\alpha_k\mathbf{a}_k\in W(A)$, ahol $\mathbf{a}_1,...,\mathbf{a}_k\in A$, $\alpha_1,...,\alpha_k\in\mathbb{R}$, továbbá $\lambda\in\mathbb{R}$, akkor a λ-szoros: $\lambda\alpha_1\mathbf{a}_1+...+\lambda\alpha_k\mathbf{a}_k\in W(A)$.]
Így már sok alteret konstruálhatunk, például a 3. előadás 2-3. oldalán szereplő négy példa mindegyikében. Az ottani V_1-ben azon térvektorok, amelyek végpontjai egy adott, az O-t tartalmazó egyenesen vannak, alteret alkotnak. Ha most W_1 és W_2 két különböző ilyen egyenesből származó altér, akkor nem okoz nagy meglepetést, hogy $W_1\cup W_2$ már nem altér (mindegyikből egy nullvektortól különböző vektort véve, ezek összege már nem eleme az egyesítésnek). Két altér egyesítése tehát általában nem altér. Ezután meglepő lehet, hogy két altér, sőt akárhány altér metszete mindig altér:
TÉTEL: $\{W_1\leqq V,\,W_2\leqq V\}\Rightarrow W_1\cap W_2\leqq V$.
[Bizonyítás: A korábbi tételünk 1., 2., 3. feltételét kell $W_1\cap W_2$-re ellenőriznünk, közben persze W_i-re $(i=1,2)$ felhasználhatjuk a három feltevést, hisz ők alterek.
1.: $\mathbf{0}\in W_1,\mathbf{0}\in W_2$, így $\mathbf{0}\in W_1\cap W_2$, tehát $\emptyset\neq W_1\cap W_2$, míg $W_1\cap W_2\subseteqq V$ nyilvánvaló.
2.: Ha $\mathbf{a},\mathbf{b}\in W_1\cap W_2$, akkor $\mathbf{a},\mathbf{b}\in W_i\,(i\in\{1,2\})$, tehát $\mathbf{a}+\mathbf{b}\in W_i\,(i\in\{1,2\})$ (hisz alterek), így $\mathbf{a}+\mathbf{b}\in W_1\cap W_2$.
3.: Ha $\lambda\in\mathbb{R}$ és $\mathbf{a}\in W_1\cap W_2$, akkor $\lambda\in\mathbb{R}$ és $\mathbf{a}\in W_i\,(i\in\{1,2\})$, tehát $\lambda\mathbf{a}\in W_i\,(i\in\{1,2\})$ (hisz alterek), így $\lambda\mathbf{a}\in W_1\cap W_2$.]
Hasonlóan igazolható az is, hogy akárhány (akár végtelen sok, s nemcsak megszámlálható sok) altér metszete is altér, csupán az $\{1,2\}$ helyére kell írni a megfelelő indexhalmazt.
DEFINÍCIÓ: $\emptyset\neq A$ „$\subseteqq$" V esetén tekintsük a V összes, az A-t „tartalmazó" alterének a metszetét. Ennek neve: az A által generált (kifeszített) altér, jelölése: $\langle A\rangle$.
A fenti definíció értelmes: van mit metszeni, hisz ismerünk A-t „tartalmazó" alteret, ilyen pl. maga a V, de ilyen a $W(A)$ is; akárhány altér metszete is altér, így tényleg altérhez jutunk.
TÉTEL: $\emptyset\neq A$ „$\subseteqq$" V esetén $\langle A\rangle=W(A)$.

[Bizonyítás: $\subseteqq$: Mivel A „$\subseteqq$" $W(A)$, és $W(A)$ altér, azért $W(A)$ szerepel a metszendők között, tehát $\langle A\rangle \subseteqq W(A)$. $\supseteqq$: Legyen $W' \leqq V$, melyre A „$\subseteqq$" W' (azaz W' a metszendők egyike). Legyen $\mathbf{v} \in W(A)$. Ekkor $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + ... + \alpha_k\mathbf{a}_k$ alakú, ahol $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in A$. Utóbbi miatt $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k \in W'$ is teljesül, tehát lineáris kombinációjuk is ebben az altérben van: $\mathbf{v} \in W'$, tehát $W(A) \subseteqq W'$, azaz $W(A)$ benne van a metszendők bármelyikében, így a metszetben is.]

DEFINÍCIÓ: G **generátorrendszer** (rövidítve: G) V-ben, ha $\emptyset \neq G$ „$\subseteqq$" V és $\langle G\rangle = V$. Így már a **bázis** definícióját is rövidíthetjük: **B (V-ben) $\equiv$ L és G (V-ben).** Ez végtelen vektorrendszerre is érvényes lesz, ha L-et definiáljuk erre az esetre: Egy végtelen vektorrendszer L, ha bármely véges részrendszere L.

A gyakorlaton szereplő feladatokkal kapcsolatban jegyezzük meg, hogy $W_1, W_2 \leqq V$ esetén az általuk generált altér: $\langle W_1, W_2\rangle = \langle W_1 \cup W_2\rangle$. [Útmutatás a vizsgálatához: célszerű megnézni a $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ alakú vektorokat, ahol $\mathbf{w}_i \in W_i$.]

Ha $V = \{\mathbf{0}\}$, akkor nincs benne független rendszer, így bázis sincs. Bizonyítás nélkül megemlítjük, hogy $V \neq \{\mathbf{0}\}$ esetén létezik bázis V-ben. Ennek egy speciális esetét fogjuk csak bizonyítani. A következő tétel bizonyítását is későbbre halasztjuk:

TÉTEL: Ha $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ bázisok V-ben, n pozitív egész, $|\mathrm{B}_1| = n$, akkor B_2 is véges és $|\mathrm{B}_2| = n$.

Ez biztosítja majd a következő definíciók értelmességét:

DEFINÍCIÓ: **Az $\mathbb{R}$ feletti V vektortér dimenziója**:

$$\dim V = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } V = \{\mathbf{0}\}\,; \\ \text{egy tetszőleges B elemszáma}, & \text{ha } V \neq \{\mathbf{0}\} \text{ és van véges G } V\text{-ben}\,; \\ \infty & \text{egyébként.} \end{cases}$$

DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m$ **vektorrendszer rangja** az általuk generált altér dimenziója: $r(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m) = \dim\langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m\rangle$ (az r helyén használatos a ρ illetve ϱ is.)

A következőkben adott bázisban koordinátáikkal megadott véges sok vektorból álló vektorrendszerről fogjuk eldönteni, hogy L-e, meghatározzuk a rangját, az általuk generált altérben keresünk bázist, továbbá egy másik vektorról eldöntjük, hogy benne van-e az előbbi vektorrendszer által generált altérben. Mindezeket lineáris egyenletrendszerhez kapcsolva tekintjük át. Legyen adott a következő valós együtthatós, n egyenletből álló, m ismeretlenes lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

Itt tehát adottak az a_{ij}, b_i valós számok és keressük az x_j megoldásokat a valós számok körében. Az egyenletek n számának megfelelően választunk egy n dimenziós $\mathbb{R}$ feletti vektorteret, s abban egy bázist (pl. $V = \mathbb{R}^n$ a szokásos komponensenkénti műveletekkel, s ebben a 4. előadás 1-2. oldalán szereplő ún. triviális (vagy standard) bázis megfelel). Legyen tehát V vektortér $\mathbb{R}$ felett, $\dim\, V = n$, továbbá $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V-ben. Az egyenletrendszer adatai segítségével most megadjuk a V-ben a $\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m$ vektorokat a következőképpen:

$$[\mathbf{b}]_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},\ [\mathbf{a}_1]_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix},\ [\mathbf{a}_2]_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix},\ \dots\ ,\ [\mathbf{a}_m]_{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Látható, hogy $x_1, ..., x_m \in \mathbb{R}$ akkor és csak akkor megoldása a fenti lineáris egyenletrendszernek, ha $x_1\mathbf{a}_1 + ... + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{b}$ teljesül. Ezt a vektoregyenletet szokás a lineáris egyenletrendszer vektor-alakjának hívni. Maga a megoldhatóság tehát azzal ekvivalens, hogy $\mathbf{b} \in \langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m \rangle$.
Az elemi bázistranszformáció kiinduló táblázata a koordinátaoszlopokból (az $\mathbf{e}$ bázisban):

$$\begin{array}{c|cccc|c|}
 & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & ... & \mathbf{a}_m & \mathbf{b} \\
\hline
\mathbf{e}_1 & a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} & b_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\mathbf{e}_i & a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{im} & b_i \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\mathbf{e}_n & a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} & b_n
\end{array}$$

Ezek után elemi bázistranszformációs lépések sorozatát alkalmazzuk a következő megkötésekkel: mindig $\mathbf{a}_\bullet$-t próbálunk bevinni alkalmas $\mathbf{e}_{\bullet\bullet}$ helyére (az indexek ($\bullet$ illetve $\bullet\bullet$) lehetnek különbözők is, lehetnek azonosak is) úgy, hogy minden lépésben újra bázist kapjunk, s ezen új bázisban kiszámoljuk minden vektor új koordinátáit. Tehát $\mathbf{b}$-t nem visszük be, de mindig kiszámoljuk az új koordinátáit. A már bevitt $\mathbf{a}_\bullet$-k koordinátáit nem szükséges kiírni, mert azok bármikor könnyen felírhatók. Az első lépésnél az $\mathbf{e}_i$ helyére akkor vihetjük be az $\mathbf{a}_j$-t, ha $a_{ij} \neq 0$. Csak akkor nem indul el az eljárás, ha minden $a_{ij} = 0$. Ebben az esetben $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$ esetén minden valós szám m-es megoldás, különben meg nincs megoldás. Ha viszont elindul az eljárás, akkor már vigyáznunk kell, nehogy bevitt $\mathbf{a}_\bullet$-t lőjünk ki egy másikkal, mert ez a felesleges lépésen túl adatvesztéssel is jár, ha a bevittet már nem írtuk ki külön. Röviden tehát mindig $\mathbf{a}_\bullet \to \mathbf{e}_{\bullet\bullet}$ (az indexek lehetnek azonosak is, lehetnek különbözők is!). Az eljárás előbb-utóbb véget ér, leáll: elfogyhatnak az $\mathbf{e}$-k, vagy az $\mathbf{a}$-k, de az is lehet, hogy a szóba jövő helyeken csupa 0 áll a táblázatban. A bevitt $\mathbf{a}$-k legyenek a következők: $\mathbf{a}_{i_1}, ..., \mathbf{a}_{i_r}$, a kint maradtak (ha van ilyen): $\mathbf{a}_{i_{r+1}}, ..., \mathbf{a}_{i_m}$. Mivel a bevittek szétszórtan lehetnek a megmaradt $\mathbf{e}$-k között, sorcseréket hajtunk végre, hogy előre kerüljenek (az áttekinthetőség kedvéért). Az így utánuk kerülő $\mathbf{e}$-ket nem indexeljük precízen, vesszővel utalunk csupán arra, hogy az index eltérhet a feltüntetettől. A leállás utáni táblázatban a legfontosabb: a leállás után a kint maradt $\mathbf{a}$-k alatt a (vesszős) $\mathbf{e}$-k soraiban csupa 0 van:

$$\begin{array}{c|ccc|c|}
 & \mathbf{a}_{i_{r+1}} & ... & \mathbf{a}_{i_m} & \mathbf{b} \\
\hline
\mathbf{a}_{i_1} & d_{11} & ... & d_{1,m-r} & d_1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\mathbf{a}_{i_r} & d_{r1} & ... & d_{r,m-r} & d_r \\
\mathbf{e}'_{r+1} & 0 & ... & 0 & \bullet \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\mathbf{e}'_n & 0 & ... & 0 & \bullet
\end{array}$$

Ebből a következők olvashatók le:
$\exists$ megoldás $\Leftrightarrow$ $\mathbf{b}$ oszlopában a (vesszős) $\mathbf{e}$-k soraiban csupa 0 áll vagy ez a rész nincs (azaz minden $\bullet = 0$ vagy $r = n$). Ha ez a feltétel teljesül, akkor pl. $x_{i_1} = d_1, ..., x_{i_r} = d_r$, többi $= 0$ egy megoldás. $\mathbf{a}_{i_1}, ..., \mathbf{a}_{i_r}$ bázis $\langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m \rangle$-ben, $r(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m) = r$.