2008. szeptember 29/30.

Lineáris algebra (A, B, C)
4. előadás
(vázlat)

DEFINÍCIÓ: Legyen V nem üres halmaz (elemei: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, ...$). V vektortér [vagy lineáris tér] az $\mathbb{R}$ felett a $\dot{+}, \lambda\cdot$ műveletekre nézve, ha teljesül mind a tíz alábbi követelmény:
I./1. $\dot{+} : V \times V \to V$, azaz $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$-hez hozzá van rendelve egy $\mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b} \in V$;
I./2. $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \quad \mathbf{b} \dot{+} \mathbf{a} = \mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b}$ (kommutativitás);
I./3. $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V \quad (\mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b}) \dot{+} \mathbf{c} = \mathbf{a} \dot{+} (\mathbf{b} \dot{+} \mathbf{c})$ (asszociativitás);
I./4. $\exists\, \mathbf{0} \in V : \forall\, \mathbf{a} \in V \quad \mathbf{0} \dot{+} \mathbf{a} = \mathbf{a} (= \mathbf{a} \dot{+} \mathbf{0})$ („nullvektor” létezése);
I./5. $\forall\, \mathbf{a} \in V\ \exists (-\mathbf{a}) \in V : (-\mathbf{a}) \dot{+} \mathbf{a} = \mathbf{0}\, (= \mathbf{a} \dot{+} (-\mathbf{a}))$ („ellentett” létezése);
II./1. $\lambda\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, azaz $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in V$-hez hozzá van rendelve egy $\lambda \cdot \mathbf{a} \in V$;
II./2. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in V \quad (\lambda\mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{a})$ („asszociativitás”);
II./3. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in V \quad (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{a} \dot{+} \mu \cdot \mathbf{a}$ (első disztibutivitás);
II./4. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \quad \lambda \cdot (\mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b}) = \lambda \cdot \mathbf{a} \dot{+} \lambda \cdot \mathbf{b}$ (második disztributivitás);
II./5. $\forall\, \mathbf{a} \in V \quad 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$.
A 3. előadás 2. oldalán szerepelt már ez a tíz ún. vektortéraxióma. Most már azonban mindenki kellőképpen unhatja a műveletekhez hozzábiggyesztett kis pontot, nosza, „pöttytelenítünk”: a műveleteket a kis pont nélkül írjuk, azaz $\mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b}$ helyett ezentúl $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, a $\lambda \cdot \mathbf{a}$ helyett ezentúl $\lambda\mathbf{a}$ szerepel. Kevesebbet kell tehát fáradoznunk, ha most lineáris kombinációt próbálunk definiálni. Nem szeretnénk azonban a zárójelezéssel bajlódni (most a gyakorlatok igényei fontosabbak), majd később az I./3. felhasználásával pótlólag igazoljuk, hogy az összeg tetszőlegesen zárójelezhető.
Az alábbiakban feltesszük, hogy V vektortér az $\mathbb{R}$ felett a $+, \lambda\cdot$ műveletekre nézve, s megállapodunk a következőben: $\mathbf{a}\lambda = \lambda\mathbf{a}$.
DEFINÍCIÓ: Legyen $k \geqq 1$; $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k \in V$ [vektorrendszer, rövidítve: vr; a „rendszer” arra utal, hogy a vektorok között lehetnek egyenlők, akár mind egyenlő lehet]; $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$. Az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ vr $\lambda_1, ..., \lambda_k$ együtthatós LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_k\mathbf{a}_k$. Az eredmény egy V-beli vektor. Az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ vr TRIVIÁLIS LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA: $0\mathbf{a}_1 + ... + 0\mathbf{a}_k$. Bármely vr triviális lineáris kombinációja $= \mathbf{0}$.
DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ vr LINEÁRISAN ÖSSZEFÜGGŐ (rövidítve: Ö), ha $\exists\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$, nem mind 0, melyekre $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ (azaz, ha a vektorrendszernek létezik nullvektort adó nemtriviális lineáris kombinációja).
DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ vr LINEÁRISAN FÜGGETLEN (rövidítve: L), ha $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k \in \mathbb{R}; \mu_1\mathbf{a}_1 + \mu_2\mathbf{a}_2 + ... + \mu_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k = 0\}$ (azaz, ha a vektorrendszernek CSAK a triviális lineáris kombinációja ad nullvektort).
A második fogalom az előző tagadásaként adódik, azért részleteztük mégis, mert veszélyes: sokan hajlamosak $\Rightarrow$ helyett $\Leftarrow$-t gondolni, pedig utóbbi mindössze annyi, hogy a triviális lineáris kombináció nullvektor.
Most már láthatjuk a hasznát az eddigieknek: nagy n esetén $\mathbb{R}^n$-ben találhatunk nagy elemszámú lineárisan független vektorrendszereket. Olyan példát választunk, ahol a számolás triviális, szinte látszik.

$$\text{Legyen } \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n \text{ a következő:} \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, ..., \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tegyük fel, hogy $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n \in \mathbb{R};\ \mu_1\mathbf{e}_1 + \mu_2\mathbf{e}_2 + ... + \mu_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}\}$. A komponensenkénti összeadás és skalárral való szorzás szerint ekkor

$$\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ ebből pedig következik, hogy } \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_n = 0.$$

Beláttuk tehát, hogy $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n$ L. Sőt, még azt is észrevehetjük, hogy $\mathbb{R}^n$ minden elemét elállítják lineáris kombinációjukként (az együtthatók a komponensekből adódnak). E két tulajdonság együttes fontosságát láttuk a térbeli tételnél, indokolt általában is bevezetni a következő definíciót:

DEFINÍCIÓ: Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett a $+, \lambda\cdot$ műveletekre, $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n \in V$. Az $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis (rövidítve: B) V-ben, ha L és a V minden vektorát előállítják lineáris kombinációjukként.

Itt az L az egyértelműség igazolásához kell majd, de egyelőre csak azt vizsgáljuk, hogyan lehet egy bázisból egyetlen elem megváltoztatásával újra bázishoz jutni.

TÉTEL (ELEMI BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ):

Legyen $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ B V-ben; $\mathbf{a} \in V$; $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n$; $1 \leqq i \leqq n$. Ekkor
$\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{a}, \mathbf{e}_{i+1}, ..., \mathbf{e}_n$ B V-ben $\quad\Leftrightarrow\quad \alpha_i \neq 0$.

[Bizonyítás: $\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy $\alpha_i = 0$. Ekkor $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + ... + \alpha_{i-1}\mathbf{e}_{i-1} + 0\mathbf{e}_i + \alpha_{i+1}\mathbf{e}_{i+1} + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n$, tehát $\alpha_1\mathbf{e}_1 + ... + \alpha_{i-1}\mathbf{e}_{i-1} + (-1)\mathbf{a} + \alpha_{i+1}\mathbf{e}_{i+1} + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$, így $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{a}, \mathbf{e}_{i+1}, ..., \mathbf{e}_n$ Ö, ami ellentmondás.

$\Leftarrow$: Először azt bizonyítjuk be, hogy az új rendszer is előállít mindent lineáris kombinációként, amit az eredeti előállított lineáris kombinációként. Legyen $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + ... + x_i\mathbf{e}_i + ... + x_n\mathbf{e}_n$. Keresünk olyan $y_1, ..., y_i, ..., y_n$ számokat, melyekre $\mathbf{x} = y_1\mathbf{e}_1 + ... + y_{i-1}\mathbf{e}_{i-1} + y_i\mathbf{a} + y_{i+1}\mathbf{e}_{i+1} + ... + y_n\mathbf{e}_n$. Beírva az $\mathbf{a}$ előállítását, $\mathbf{x} = (y_1 + y_i\alpha_1)\mathbf{e}_1 + ... + (y_i\alpha_i)\mathbf{e}_i + ... + (y_n + y_i\alpha_n)\mathbf{e}_n$ adódik, amiből kitalálhatjuk a kívánt számokat (most $\alpha_i \neq 0$):

$$y_i = \frac{x_i}{\alpha_i}, \qquad t \neq i \quad \text{esetén pedig} \quad y_t = x_t - \frac{x_i}{\alpha_i}\alpha_t,$$

$$\mathbf{x} = \left(x_1 - \frac{x_i}{\alpha_i}\alpha_1\right)\mathbf{e}_1 + ... + \frac{x_i}{\alpha_i}\mathbf{a} + ... + \left(x_n - \frac{x_i}{\alpha_i}\alpha_n\right)\mathbf{e}_n.$$

[[Akinek ez a számolás gondot okozott az y-ok keresgélése miatt, az elkerülheti ezt a következő módon: Az $\alpha_i \neq 0$ felhasználásával kifejezhetjük az $\mathbf{e}_i$-t az $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + ... + \alpha_i\mathbf{e}_i + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n$-ből:

$$\mathbf{e}_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\mathbf{e}_1 - ... + \frac{1}{\alpha_i}\mathbf{a} - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_i}\mathbf{e}_n,$$

így

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + ... + x_i\left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\mathbf{e}_1 - ... + \frac{1}{\alpha_i}\mathbf{a} - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_i}\mathbf{e}_n\right) + ... + x_n\mathbf{e}_n,$$

azaz

$$\mathbf{x} = \left(x_1 - \frac{x_i}{\alpha_i}\alpha_1\right)\mathbf{e}_1 + ... + \frac{x_i}{\alpha_i}\mathbf{a} + ... + \left(x_n - \frac{x_i}{\alpha_i}\alpha_n\right)\mathbf{e}_n$$

adódik.]]

L biz: Tegyük fel, hogy $\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n \in \mathbb{R};\ \mu_1\mathbf{e}_1 + ... + \mu_{i-1}\mathbf{e}_{i-1} + \mu_i\mathbf{a} + \mu_{i+1}\mathbf{e}_{i+1} + ... + \mu_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}\}$. Beírva az $\mathbf{a}$ előállítását, $(\mu_1 + \mu_i\alpha_1)\mathbf{e}_1 + ... + (\mu_i\alpha_i)\mathbf{e}_i + ... + (\mu_n + \mu_i\alpha_n)\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ adódik. $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_i, ..., \mathbf{e}_n$ L, tehát minden zárójeles kifejezés 0:

$\mu_1 + \mu_i\alpha_1 = 0, \quad ..., \quad \mu_i\alpha_i = 0, \quad ..., \quad \mu_n + \mu_i\alpha_n = 0,$
az i-edikből $\alpha_i \neq 0$ miatt $\mu_i = 0$ jön, ezt beírva a többibe, végül $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_n = 0$ adódik.]
DEFINÍCIÓ: $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ B V-ben, $\mathbf{a} \in V$, $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n$ esetén azt mondjuk, hogy az $\mathbf{a}$ koordinátái az $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázisban $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Jelölése:

$$[\mathbf{a}]_{\mathbf{e}} = [\mathbf{a}]_{\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

A korábbi elemi bázistranszformációs tétel $\alpha_i \neq 0$ feltevésű részének számolási szabályai a régi, illetve az új bázisban vett koordinátákkal így foglalhatók össze:

$\alpha_i \neq 0$	$\mathbf{a}$	$\mathbf{x}$		$\mathbf{a}$	$\mathbf{x}$
$\mathbf{e}_1$	α_1	x_1	$\mathbf{e}_1$	0	$x_1 - (x_i/\alpha_i)\alpha_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{e}_i$	α_i	x_i	$\mathbf{a}$	1	x_i/α_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{e}_n$	α_n	x_n	$\mathbf{e}_n$	0	$x_n - (x_i/\alpha_i)\alpha_n$

Foglalkoztunk már bázisokkal, alkalmazásukkal, de adott V-ben a létezésük vizsgálatát későbbre halasztjuk, mint azt is, hogy adott V-ben mi lehet $|\mathrm{B}|$?
Feladatmegoldás során adódhatott olyan helyzet, hogy egy adott V ($\mathbb{R}$ feletti) vektortér adott W részhalmazáról kellett eldönteni, hogy vektortér-e $\mathbb{R}$ felett a V beli műveletek megszorításaira nézve. Ekkor érezhetően sok felesleges munkát tartalmazott a 10 vektortéraxióma ellenőrzése, de mindenképpen vigyázni kell a megszorításokkal. $+ : V \times V \to V$, illetve $\lambda\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ műveletek W-re való megszorításai $W \subsetneqq V$ esetén automatikusan csupán $+_{|W} : W \times W \to V$, illetve $\lambda\cdot_{|W} : \mathbb{R} \times W \to V$ típusúak!
DEFINÍCIÓ: W altere V-nek [jelölése: $W \leqq V$], ha $W \subseteqq V$ és W vektortér az $\mathbb{R}$ felett „a V beli műveletekre”, azaz pontosan fogalmazva a $+_{|W}$ és $\lambda\cdot_{|W}$ műveletekre nézve.
Vigyázat, a 3. előadásban V_4 ugyan vektortér volt $\mathbb{R}$ felett az ottani szokatlan műveletekre, de $V_4 \subsetneqq V_3$ ellenére V_4 nem altere V_3-nak: $V_4 \nleqq V_3$, mert a szokatlan műveletek különböznek a 3./ példában szereplő műveletek megszorításaitól!

$$\text{TÉTEL: } W \leqq V \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lc} 1. & \emptyset \neq W \subseteqq V \\ 2. & \mathbf{a}, \mathbf{b} \in W \Rightarrow \mathbf{a} + \mathbf{b} \in W \\ 3. & \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in W \Rightarrow \lambda\mathbf{a} \in W \end{array} \right\}.$$

[Bizonyítás: $\Rightarrow$: 1. a definícióból, 2. az I./1-ből, 3. a II./1-ből következik.
$\Leftarrow$: Az 1., 2., 3. feltevésből közvetlenül adódik az I./1., II./1., továbbá az „azonosság jellegű” I./2., I./3., II./2., II./3., II./4. és II./5. Bizonyításra már csak I./4. és I./5. szorul. Mindkettőnél az a helyzet, hogy a V-ben van megfelelő tulajdonságú elem, csak az a kérdés, benne van-e W-ben. 1. szerint $\exists\mathbf{a} \in W$, 3. szerint $0\mathbf{a} \in W$, de tudjuk, hogy ez épp a $\mathbf{0}$. Hasonlóan, ha $\mathbf{a} \in W$, akkor 3. szerint $(-1)\mathbf{a} \in W$, s tudjuk, hogy ez épp az $(-\mathbf{a})$. (Egyúttal kiderült, hogy egy altérnek nem lehet saját, „külön bejáratú” nullvektora, hanem a V nullvektora lesz benne az altérben.)]
Ezzel a tétellel elértük, hogy egy vektortér részhalmazának altér voltát vizsgálva tíz helyett csupán három követelményt kelljen ellenőriznünk. Bizonyítás nélkül megemlítjük a következő változatot is:

$$\text{TÉTEL: } W \leqq V \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lc} 1'. & \emptyset \neq W \subseteqq V \\ 2'. & \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in W \Rightarrow \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} \in W \end{array} \right\}.$$