2008. szeptember 22/23.

Lineáris algebra (A, B, C)
3. előadás
(vázlat)

Tekintsük most újra az 1. előadáson már szerepelt három egyenletből álló négy ismeretlenes lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned}$$

Definiáljuk most a $\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ térvektorokat úgy, hogy egy rögzített $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rendszerbeli koordinátáikat adjuk meg az egyenletrendszer adataival:

$$[\mathbf{b}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, [\mathbf{a}_1]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}, [\mathbf{a}_2]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}, [\mathbf{a}_3]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}, [\mathbf{a}_4]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}.$$

Az összeg és számszoros koordinátáinak számolását végiggondolva, azt kapjuk, hogy az x_1, x_2, x_3, x_4 valós számok pontosan akkor elégítik ki a fenti lineáris egyenletrendszert, ha

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{b}$$

teljesül rájuk. Tehát pontosan akkor létezik megoldás, ha a $\mathbf{b}$ előállítható az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ lineáris kombinációjaként.
Ha netán olyan szerencsénk van, hogy $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ nem egysíkú, azaz L (mind a 4 nem lehet az!), akkor x_4 tetszőlegesen megválasztható, majd a térbeli tétel révén a $\mathbf{b} - x_4\mathbf{a}_4$ (egyértelműen) előállítható az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ lineáris kombinációjaként. A három vektor függetlensége pl. a vegyes szorzatuk $\neq 0$ voltának ellenőrzéséből adódhat. Itt még rengeteg esetet kellene nézni, de az igazi gond az, hogy mit tegyünk 3-nál több egyenlet esetén:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

A koordináta-oszlopok mintájára próbálkozhatunk a következő őrültséggel:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{bmatrix} + \ldots + x_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

A baj az, hogy nem volt szó oszlopok számszorosáról, így a definiálatlan dolgok összege is értelmetlen. A jobb oldalnak viszont tudunk értelmet adni: ez egy (oszlopba) rendezett valós szám n-es, vagyis $\mathbb{R}^n$ egy eleme. Két ilyen rendezett valós szám n-es pontosan akkor egyezik meg, ha az oszlop megfelelő helyein ugyanazok az elemek vagy komponensek állnak (csak koordinátát ne mondjunk, mert az most értelmetlen). A bal oldalra is ilyen n komponensű oszlopokat kellene gyártanunk, az $\mathbb{R}^n$-en kellene műveleteket definiálnunk, a következő műveletek az előzmények alapján természetesnek mondhatók.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{esetén legyen} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad \text{esetén legyen} \qquad \lambda \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Ezzel látszólag már minden őrültség értelmet kapott, de ez nem egészen igaz: Az n tagú összegben nem volt zárójelezés! Persze, ha az imént definiált $\mathbb{R}^n$-beli összeadás asszociatív, akkor nincs baj. Valóban, ez visszavezethető a valós számok összeadásának asszociatív voltára. Most vizsgálhatjuk szisztematikusan a műveleti tulajdonságokat, csak az a kérdés, hogy minek: egy lehetséges válasz az lehet, hogy a térvektorok mintájára definiálva a lineáris kombináció, Ö, L fogalmát, talán átvihetjük a korábbi ötleteket az $n > 3$ egyenlet és m ismeretlen esetére. Első akadály a triviális lineáris kombináció (na, ez még nem gond), de az eredménye már esetleg: egy csupa nullából álló rendezett valós szám n-es. Ez a fent definiált összeadásnál mindent helyben hagy:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad \text{esetén} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

A csupa nullából álló rendezett valós szám n-es tehát úgy viselkedik itt, mint a térvektoroknál a nullvektor az 1. ea. 3. oldala alján szereplő nyolc műveleti tulajdonság egyikénél! Rögtön vérszemet is kaphatunk, könnyen ellenőrizhető, hogy a többi hét megfelelője is teljesül, pl. egy rendezett valós szám n-es komponenseinek ellentettjeiből álló n-es eljátssza az ellentett szerepét. Azt, hogy a két műveletre eme nyolc műveleti tulajdonság teljesül, úgy fogjuk mondani, hogy $\mathbb{R}^n$ vektortér az $\mathbb{R}$ felett a fenti összeadásra és skalárral való szorzásra nézve. A további tulajdonságok vizsgálatatánál sok fáradságot és helyet takaríthatunk meg, ha a térvektoros jelölést próbáljuk hasznosítani. Ez azzal a további előnnyel is jár, hogy sok hasonló tulajdonságú esetet is belefoglalhatunk, s egyszerre kezelhetünk. Csak arra kell figyelnünk, hogy például az $\mathbf{a}$ vektor ezentúl nem szükségképpen térvektor, s persze pontosan meg kell fogalmazni, hogy akkor mit is tudunk róla. Egy ideig egy kis pontot szerepeltetünk az összeadás jele felett és a skalárral való szorzásnál, ezzel is jelezve, hogy az adott helyen nem szükségképpen a térvektoros műveletek szerepelnek. Ha pedig a szokásostól nagyon eltérően definált konkrét művelet fordul elő, ezt a kis pont helyett $\bullet$ jelzi majd.

DEFINÍCIÓ: Legyen V nem üres halmaz (elemei: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, ...$). V vektortér [vagy lineáris tér] az $\mathbb{R}$ felett a $\dot{+}, \lambda\cdot$ műveletekre nézve, ha teljesül mind a tíz alábbi követelmény:

I./1. $\dot{+} \,:\, V \times V \to V$, azaz $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$-hez hozzá van rendelve egy $\mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b} \in V$;

I./2. $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \quad \mathbf{b} \dot{+} \mathbf{a} = \mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b}$ (kommutativitás);

I./3. $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V \quad (\mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b}) \dot{+} \mathbf{c} = \mathbf{a} \dot{+} (\mathbf{b} \dot{+} \mathbf{c})$ (asszociativitás);

I./4. $\exists\, \mathbf{0} \in V \,:\, \forall\, \mathbf{a} \in V \quad \mathbf{0} \dot{+} \mathbf{a} = \mathbf{a} (= \mathbf{a} \dot{+} \mathbf{0})$ („nullvektor” létezése);

I./5. $\forall\, \mathbf{a} \in V\ \exists (-\mathbf{a}) \in V \,:\, (-\mathbf{a}) \dot{+} \mathbf{a} = \mathbf{0}\, (= \mathbf{a} \dot{+} (-\mathbf{a}))$ („ellentett” létezése);

II./1. $\lambda\cdot \,:\, \mathbb{R} \times V \to V$, azaz $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in V$-hez hozzá van rendelve egy $\lambda \cdot \mathbf{a} \in V$;

II./2. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in V \quad (\lambda\mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{a})$ („asszociativitás”);

II./3. $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in V \quad (\lambda + \mu) \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{a} \dot{+} \mu \cdot \mathbf{a}$ (első disztibutivitás);

II./4. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \quad \lambda \cdot (\mathbf{a} \dot{+} \mathbf{b}) = \lambda \cdot \mathbf{a} \dot{+} \lambda \cdot \mathbf{b}$ (második disztributivitás);

II./5. $\forall\, \mathbf{a} \in V \quad 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

PÉLDÁK $\mathbb{R}$ felett: 1./ $V_1 =$\{az összes térvektor rögzített O kezdőponttal\}, összeadás és skalárral való szorzás a szokásos módon. 2./ n adott pozitív egész, $V_2 = \mathbb{R}^n$, összeadás és skalárral való szorzás komponensenként. 3./ $V_3 = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, f, g \in V_3$ esetén tetszőleges $x \in \mathbb{R}$-re $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}, f \in V_3$ esetén tetszőleges $x \in \mathbb{R}$-re

$(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$. 4./ $V_4 = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+\}$, $f, g \in V_4$ esetén tetszőleges $x \in \mathbb{R}$-re $(f \overset{\bullet}{+} g)(x) = f(x)g(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in V_4$ esetén tetszőleges $x \in \mathbb{R}$-re $(\lambda \bullet f)(x) = f(x)^\lambda$.
A tíz ún. vektortéraxióma után 4 példa szerepelt, most az első példát ellenpéldává módosítjuk ($\mathbb{R}$ felett): V_5 ={az összes térvektor rögzített O kezdőponttal}, összeadás a szokásos módon, de $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $\lambda \bullet \mathbf{a} = \mathbf{0}$ (mindig!). Most nem kapunk vektorteret, mert a II./5. axióma nem teljesül. Ebben az ellenpéldában egyedül a II./5. nem teljesül, amit úgy is fogalmazhatunk, hogy a II./5. vektortéraxióma független a többitől (azokból nem következik). Van azonban „fölösleges” is: bizonyítható, hogy az I./2. következik a többi kilencből. Ez a bizonyítás azonban feleslegesen nehezítené a tárgyalást. Így van felesleges axiómánk, akár még egyebet is feltehetnénk, pl. ! kínálkozik I./4-be és I./5-be. Ezt azért nem tesszük, mert a bizonyításuk rövid és hasznos. Fontos gyakorolnunk, hogy a $\mathbf{0}$ csak egy jelölés, csak azt tudjuk róla, ami ott van az I./4-ben. Az említett 4 példában mindig más és más volt: az elsőben a térvektorok megszokott nullvektora, a másodikban a csupa 0 oszlop, a harmadikban az azonosan 0 függvény, a negyedikben viszont az azonosan 1 függvény.
Az alábbiakban feltesszük, hogy V vektortér az $\mathbb{R}$ felett a $\dotplus, \lambda\cdot$ műveletekre nézve, és az egyértelműség igazolásával egészítjük ki az I./4. axiómát.
TÉTEL: $\exists\,!\,\mathbf{0} \in V \;:\; \forall\, \mathbf{a} \in V \quad \mathbf{0} \dotplus \mathbf{a} = \mathbf{a} (= \mathbf{a} \dotplus \mathbf{0})$.
[! biz: Tegyük fel, hogy $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2 \in V$, melyekre $\forall\, \mathbf{a} \in V$, $\mathbf{0}_1 \dotplus \mathbf{a} = \mathbf{a}$ és $\forall\, \mathbf{b} \in V$, $\mathbf{0}_2 \dotplus \mathbf{b} = \mathbf{b}$. Ekkor az $\mathbf{a} = \mathbf{0}_2, \mathbf{b} = \mathbf{0}_1$ választással azt kapjuk, hogy $\mathbf{0}_1 \dotplus \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$ és $\mathbf{0}_2 \dotplus \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1$. Innen az I./2. felhasználásával $\mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1$ adódik.]
TÉTEL: $\forall\, \mathbf{a} \in V \;\exists\,!\,(-\mathbf{a}) \in V \;:\; (-\mathbf{a}) \dotplus \mathbf{a} = \mathbf{0} (= \mathbf{a} \dotplus (-\mathbf{a}))$.
[! biz: Tegyük fel, hogy $\mathbf{a} \in V$, $(-\mathbf{a})_1, (-\mathbf{a})_2 \in V$, melyekre $(-\mathbf{a})_1 \dotplus \mathbf{a} = \mathbf{0}$ és $(-\mathbf{a})_2 \dotplus \mathbf{a} = \mathbf{0}$. Ebből az (I./2. és) I./3. felhasználásával $(-\mathbf{a})_2 = \mathbf{0} \dotplus (-\mathbf{a})_2 = ((-\mathbf{a})_1 \dotplus \mathbf{a}) \dotplus (-\mathbf{a})_2 = (-\mathbf{a})_1 \dotplus (\mathbf{a} \dotplus (-\mathbf{a})_2) = (-\mathbf{a})_1 \dotplus \mathbf{0} = (-\mathbf{a})_1$ adódik.]
Feladatmegoldás során adódhat olyan helyzet, hogy egy adott V ($\mathbb{R}$ feletti) vektortér adott W részhalmazáról kell eldönteni, hogy vektortér-e $\mathbb{R}$ felett a V beli műveletek megszorításaira nézve. Igenlő válasz esetén azt fogjuk mondani, hogy W altere V-nek. A feladatlapon szerepelni fog az $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ jelölés is, ez a $\lambda \cdot \mathbf{a} \dotplus \mu \cdot \mathbf{b}$ alakú elemek halmaza. Mindezekre még részletesebben visszatérünk.
Természetes igény lehet $(-\mathbf{a})$ és $(-1) \cdot \mathbf{a}$ összehasonlítása: II./3. révén $\mathbf{a} \dotplus (-1) \cdot \mathbf{a} = 1 \cdot \mathbf{a} \dotplus (-1) \cdot \mathbf{a} = (1 + (-1))\mathbf{a} = 0 \cdot \mathbf{a}$, s el is akadtunk. Bizony jobb lenne előbb tisztázni, hogy $\lambda \cdot \mathbf{a}$ mikor lehet $\mathbf{0}$, egyáltalán a triviálisnak várható esetben, azaz, ha egyik tényező 0 illetve $\mathbf{0}$, tényleg $\mathbf{0}$ lesz-e az eredmény?
TÉTEL: $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in V$ esetén
$\lambda \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ vagy $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.
[Bizonyítás: $\Leftarrow$: SEGÉDTÉTEL: $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} \dotplus \mathbf{x} = \mathbf{x}$ esetén $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. [[St.biz: $\mathbf{0} = (-\mathbf{x}) \dotplus \mathbf{x} = (-\mathbf{x}) \dotplus (\mathbf{x} \dotplus \mathbf{x}) = ((-\mathbf{x}) \dotplus \mathbf{x}) \dotplus \mathbf{x} = \mathbf{0} \dotplus \mathbf{x} = \mathbf{x}$.]] Legyen most $\mathbf{x}_1 = 0 \cdot \mathbf{a}$, $\mathbf{x}_2 = \lambda \cdot \mathbf{0}$. Ekkor II./3. illetve II./4. felhasználásával $\mathbf{x}_1 \dotplus \mathbf{x}_1 = 0 \cdot \mathbf{a} \dotplus 0 \cdot \mathbf{a} = (0 + 0) \cdot \mathbf{a} = 0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{x}_1$ illetve $\mathbf{x}_2 \dotplus \mathbf{x}_2 = \lambda \cdot \mathbf{0} \dotplus \lambda \cdot \mathbf{0} = \lambda \cdot (\mathbf{0} \dotplus \mathbf{0}) = \lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{x}_2$, tehát mind $\mathbf{x}_1$, mind $\mathbf{x}_2$ teljesíti a segédtétel feltételeit, így mindegyik $\mathbf{0}$.
$\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy $\lambda \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$, de $\lambda \neq 0$. Ekkor $\lambda^{-1} \in \mathbb{R}$, és a már igazolt $\Leftarrow$, azután II./2., majd II./5.felhasználásával $\mathbf{0} = \lambda^{-1} \cdot \mathbf{0} = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot \mathbf{a}) = (\lambda^{-1}\lambda) \cdot \mathbf{a} = 1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$.]
TÉTEL: $\forall\, \mathbf{a} \in V$, $(-\mathbf{a}) = (-1) \cdot \mathbf{a}$.
[Ahol fentebb elakadtunk, az most befejezhető, hisz $0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$.]