

Lineáris algebra (A, B, C)

2. előadás

(vázlat)

Emlékeztető:

DEFINÍCIÓ: Legyen $k \geq 1$; $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ térvektorrendszer [rövidítve: tvr; a „rendszer” arra utal, hogy a vektorok között lehetnek egyenlők, akár mind egyenlő lehet]; $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ tvr $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ együtthetős LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k.$$

Az eredmény egy térvektor (a kifejezést azért nem zárójeleztük, mert a térvektorok összeadásának asszociativitásából bebizonyítható, hogy az összeg tetszőlegesen zárójelezhető). Az $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ tvr TRIVIÁLIS LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA: $0\mathbf{a}_1 + \dots + 0\mathbf{a}_k$. Bármely tvr triviális lineáris kombinációja = $\mathbf{0}$.

DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ tvr LINEÁRISAN ÖSSZEFÜGGŐ (rövidítve: Ö), ha $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, nem mind 0, melyekre $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ (azaz, ha a vektorrendszernek létezik nullvektort adó nemtriviális lineáris kombinációja).

DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ tvr LINEÁRISAN FÜGGETLEN (rövidítve: L), ha $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}; \mu_1 \mathbf{a}_1 + \mu_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \mu_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = 0\}$ (azaz, ha a vektorrendszernek CSAK a triviális lineáris kombinációja ad nullvektort).

A második fogalom az előző tagadásaként adódik, azért részleteztük mégis, mert veszélyes: sokan hajlamosak \Rightarrow helyett \Leftarrow -t gondolni, pedig utóbbi mindössze annyi, hogy a triviális lineáris kombináció nullvektor.

Gyakorlásul célszerű végiggondolni a következő, térvektorokra vonatkozó állítások bizonyítását.

$$\mathbf{a}_1 \text{ Ö} \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 = \mathbf{0};$$

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \text{ Ö} \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 \parallel \mathbf{a}_2;$$

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \text{ Ö} \Leftrightarrow \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \text{ egysíkúak};$$

$$\mathbf{a}_1 \text{ L} \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0};$$

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \text{ L} \Leftrightarrow \mathbf{a}_1 \nparallel \mathbf{a}_2;$$

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \text{ L} \Leftrightarrow \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \text{ nem egysíkúak};$$

$$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \text{ tvr}; k \geq 4\} \Rightarrow \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \text{ Ö.}$$

A fentiek szerint térvektorok esetén $|L| \leq 3$, ahol egyenlőség is előfordulhat. Ezt úgy is fogjuk mondani, hogy terünk „három dimenziós”.

Térvektorok hajlásszöge: $\gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in [0, \pi]$.

DEFINÍCIÓ: Térvektorok skaláris szorzata: $\mathbf{a}\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

A térvektorok skaláris szorzatának műveleti tulajdonságai, kapcsolata a skalárral való szorzással és az összeadással (tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ térvektorokra illetve λ skalárra BIZONYÍTHATÓK):

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = \mathbf{b}\mathbf{a} \text{ (kommutativitás);}$$

$\mathbf{a}\mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ (utóbbiba beleértendő az is, ha egyik vektor nullvektor) – [ez igen VESZÉLYES tulajdonság: a skaláris szorzat NEMCSAK triviálisan adhat nullát, ami lényeges eltérés az \mathbb{R} -beli szorzáshoz képest];

$$\lambda(\mathbf{a}\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) \text{ (skalár kiemelhetősége);}$$

$$(\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{c} \stackrel{\text{ált}}{\neq} \mathbf{a}(\mathbf{b}\mathbf{c}),$$

$$\mathbf{c}\mathbf{c} = |\mathbf{c}|^2 \geq 0;$$

$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}$, $(\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{ba} + \mathbf{ca}$ (disztributivitás).

[A bizonyítás az alábbi segédtételek révén történhet.

1.St.: $|\mathbf{e}| = 1$, \mathbf{a} tetszőleges $\Rightarrow \exists! \mathbf{a}_p, \mathbf{a}_m : \mathbf{a}_p \parallel \mathbf{e}, \mathbf{a}_m \perp \mathbf{e}, \mathbf{a} = \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_m$.

2.St.: $|\mathbf{e}| = 1$, \mathbf{a} tetszőleges $\Rightarrow \mathbf{a}_p = (\mathbf{ea})\mathbf{e}$.

3.St.: $|\mathbf{e}| = 1$, \mathbf{b}, \mathbf{c} tetszőleges $\Rightarrow (\mathbf{b} + \mathbf{c})_p = \mathbf{b}_p + \mathbf{c}_p$, $(\mathbf{b} + \mathbf{c})_m = \mathbf{b}_m + \mathbf{c}_m$.

Az \mathbf{a} -val párhuzamos \mathbf{e} -t véve, a 3. Segédtételt és (háromszor) a 2. Segédtételt alkalmazva először $(\mathbf{e}(\mathbf{b} + \mathbf{c}))\mathbf{e} = (\mathbf{eb})\mathbf{e} + (\mathbf{ec})\mathbf{e}$, majd $\mathbf{e}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{eb} + \mathbf{ec}$ adódik, amit alkalmas skalárral kell még megszoroznunk. Végiggondolandó közben, hogy mely disztributivitásokat használtuk fel (jogosan?!]

Skaláris szorzat kiszámítása lineáris kombinációk esetén: Tegyük fel, hogy az \mathbf{u} és a \mathbf{v} térvektorok a koordinátáikkal adottak egy $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ bázisban (3 elemű, nem egysíkú tvr):

$$[\mathbf{u}]_{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{v}]_{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}.$$

Ekkor a (több tagra is igazolható) disztributivitás és a skalár kiemelhetőségének felhasználásával:

$$\begin{aligned} \mathbf{uv} &= (\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3)(\beta_1 \mathbf{a}_1 + \beta_2 \mathbf{a}_2 + \beta_3 \mathbf{a}_3) = \\ &= \alpha_1 \beta_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_1 \beta_2 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \alpha_1 \beta_3 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 + \\ &+ \alpha_2 \beta_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \beta_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_2 \beta_3 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3 + \\ &+ \alpha_3 \beta_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 + \alpha_3 \beta_2 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \beta_3 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3. \end{aligned}$$

Látható, hogy akkor kapunk könnyebben megjegyezhető kifejezést, ha az \mathbf{a}_i -k páronként merőleges vektorok, s még kellemesebb, ha egységvektorok (a hosszuk 1). A középiskolában már megszokott jelöléssel: Ha $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ páronként egymásra merőleges egységvektorok (és ún. jobbrendszert alkotnak, bár erre most nincs szükség), akkor

$$[\mathbf{u}]_{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{v}]_{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix},$$

azaz

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k} \quad \text{és} \quad \mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k}$$

esetén

$$\mathbf{uv} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3,$$

továbbá

$$|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{uu} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \quad \text{és} \quad |\mathbf{v}|^2 = \mathbf{vv} = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2.$$

Ha még feltesszük, hogy $\mathbf{u}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, akkor a hajlásszögüket kiszámíthatjuk az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rendszerbeli koordinátákból:

$$\cos \gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}$$

DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ nem egysíkú térvektorok ebben a sorrendben jobbrendszert alkotnak, ha – közös kezdőponttal felrajzolva őket, a kezdőpontban az \mathbf{a} és \mathbf{b} síkjára emelt merőlegesen (mint forgástengelyen) – a \mathbf{c} -t tartalmazó féltérből nézve pozitív irányú, 0° és 180° közötti forgatással vihetjük át az $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ -t a $\mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ -be.

DEFINÍCIÓ: Térvektorok VEKTORIÁLIS szorzata: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ VEKTOR („ \mathbf{a} kereszt \mathbf{b} ”):

1./ $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;

2./ $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$;

3./ $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \neq 0$ esetén $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jobbrendszer.

A térvektorok vektoriális szorzatának műveleti tulajdonságai, kapcsolata a skalárral való szorzással és az összeadással (tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ térvektorokra és λ skalárra BIZONYÍTHATÓK):

$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$;

$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (alternálás vagy antikommutativitás), így $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$ esetén $\mathbf{b} \times \mathbf{a} \neq \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (tehát a vektoriális szorzat nem kommutatív);

$\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda\mathbf{b})$ (skalár kiemelhetősége);

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$ (disztributivitás).

[A disztributivitás bizonyítása a korábbi három segédétel felhasználásával történhet, kiegészítve azzal, hogy $|\mathbf{e}| = 1$ esetén tetszőleges \mathbf{a} -ra $\mathbf{a}_m = (\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}$, ezt pedig az \mathbf{e} irányából nézve $+90^\circ$ -os forogással átvihetjük $\mathbf{e} \times \mathbf{a}$ -ba (ezzel kerülhető el a bizonyítandó állítás felhasználása).]

Ha $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ páronként egymásra merőleges egységvektorok és jobbrendszer alkotnak, akkor $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$ mind könnyen ellenőrizhető, és

$$[\mathbf{a}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{b}]_{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix},$$

azaz

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k} \text{ és } \mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k}$$

esetén a (több tagra is igazolható) disztributivitás és a skalár kiemelhetőségének felhasználásával

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \mathbf{i} - (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) \mathbf{j} + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \mathbf{k}$$

adódik. Ezt felhasználhatjuk pl. a

KIFEJTÉSI TÉTEL: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{ac})\mathbf{b} - (\mathbf{bc})\mathbf{a}$

és a

FELCSERÉLÉSI TÉTEL: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

bizonyítására. Előbbiből ki lehet mutatni, hogy a vektoriális szorzat nem asszociatív! Utóbbiban előfordult vegyesen a vektoriális és a skaláris szorzat, szokás is definiálni (de a jelölés veszélyes):

DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ térvektorok vegyes szorzata: „ \mathbf{abc} ” = $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c}$.

Belátható, hogy a nem egysíkú $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ térvektorok vegyes szorzata megegyezik az általuk kifeszített paralelepipedon előjeles térfogatával (jobbrendszerrel $+$, különben $-$ előjellel). Érdeemes még kiemelni az „elfajuló” esetet: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ egysíkú. Ezek szerint: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ L.}$