2008. december 8/9.

Lineáris algebra (A, B, C)
13. előadás
(vázlat)

Most az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rendszerbeli koordinátáikkal felírt térvektorok skaláris szorzatára nyert kifejezést (2/2) szeretnénk általánosítani először $\mathbb{R}^n$ esetére: $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\mathbf{x}^\top \mathbf{y}$ természetes általánosítás, legfeljebb a rövid jelölés kínos: $\mathbf{xy}$ nem alkalmas, mert ezek így össze nem szorozható mátrixok; a transzponálás jelét cipelni nem volna nagy fáradság, de akkor hogy általánosítsunk? Az általánosításra is alkalmas $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ jelölést választjuk [a térvektorok hajlásszögénél pont azért volt egy γ, hogy azzal ne keverjük össze; egyúttal megjegyezzük, hogy gyakori az $< \mathbf{x}, \mathbf{y} >$ jelölés is, de ezt a vektorok által generált altérrel lehetne keverni]. Ekkor a $\sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ a hosszúság természetes általánosítása. $\mathbb{C}^n$ esetén azonban már bajban lennénk, ha a szokásos műveleti tulajdonságokat is meg szeretnénk tartani, és a hosszúságot is általánosítani akarjuk. Ezen úgy segíthetünk, hogy a kommutativitást részben feláldozzuk, s a műveleti tulajdonságoknál is megbékélünk olyasfélékkel, amelyek az adjungálásra vonatkozó 8/3 oldali tétel második állítására hasonlítanak. Így $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ esetén egy természetes általánosítás: $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* \mathbf{y}$. Ezt próbáljuk most még tovább általánosítani, amikor V vektortér a T számtest felett, de megelégszünk azzal a két esettel, hogy $T = \mathbb{R}$ illetve $T = \mathbb{C}$. Mindent az utóbbinak megfelelően írunk, a valós esetben persze felesleges a konjugálás.
DEFINÍCIÓ: Legyen $T = \mathbb{R}$ vagy $T = \mathbb{C}$, továbbá V vektortér a T felett. Azt mondjuk, hogy a V (valós vagy komplex) euklideszi tér, ha adott benne egy skaláris szorzatnak nevezett $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : V \times V \to T$ függvény, melyre a következők teljesülnek minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ és $\lambda \in T$ esetén:
1./ $(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \overline{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$;
2./ $(\mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = \lambda (\mathbf{x}, \mathbf{y})$;
3./ $(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z})$;
4.a/ $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ mindig (valós és) nemnegatív;
4.b/ $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
A definícióban a 3./ követelmény az egyik disztributivitás volt, 1./ felhasználásával adódik belőle a másik disztributivitás is:
3'./ $(\mathbf{y} + \mathbf{z}, \mathbf{x}) = \overline{(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z})} = \overline{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z})} = \overline{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} + \overline{(\mathbf{x}, \mathbf{z})} = (\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{z}, \mathbf{x})$.
A 2./ követelmény megfelelőjével vigyázni kell:
2'./ $(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \lambda \mathbf{x})} = \overline{\lambda (\mathbf{y}, \mathbf{x})} = \overline{\lambda}\, \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})} = \overline{\lambda} (\mathbf{x}, \mathbf{y})$.
Az 1./ követelményből adódik, hogy $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \overline{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$, tehát $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}$, ezért volt 4.a/-ban csak zárójelben a nemnegativitás követelménye előtt [vigyázat: a $\mathbb{C}$-t nem lehet úgy rendezni, mint az $\mathbb{R}$-et].
A bevezetőben említett példákat most még kiegészítjük: a következő példa azt mutatja, hogy ugyanazt a vektorteret többféleképpen lehet euklideszivé tenni. Legyen $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ egy n rangú mátrix, s legyen $A = B^* B$. Ekkor $V = \mathbb{C}^n$-re az $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^* A \mathbf{y}$ teljesíti az összes fenti követelményt. Ugyanez igaz persze akkor is, ha itt $\mathbb{C}$ helyébe mindenütt $\mathbb{R}$-et írunk. Tanulság: amikor egy V valós vagy komplex euklideszi térről beszélünk, akkor egy V vektortérről van szó $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ felett egy **rögzített** skaláris szorzattal, mely teljesíti az 1./, 2./, 3./, 4.a/ és 4.b/ követelményeket. Egy vadabb kinézetű példa: $V = \mathbb{C}^{n \times n}$ és $(A, B) = \mathrm{Tr}(A^* B)$.
DEFINÍCIÓ: Legyen V valós vagy komplex euklideszi tér. $\mathbf{x} \in V$ esetén az $\mathbf{x}$ (euklideszi) normája: $||\mathbf{x}|| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.

Vizsgáljuk most a norma tulajdonságait, tényleg olyan-e, mint a térvektoroknál az abszolút érték? Legyen tehát $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $\lambda \in T$.
A 4.a/,b/-ből adódik, hogy $||\mathbf{x}|| \geqq 0$, továbbá $||\mathbf{x}|| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$. A 2./ és a 2'./ adja, hogy $||\lambda\mathbf{x}|| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}||$.
Használhatóság szempontjából lényeges kérdés, hogy a háromszögegyenlőtlenség vajon teljesül-e: $||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \overset{?}{\leqq} ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$.
Ezt most óvatosan csak átfogalmazzuk:

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \leqq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \Leftrightarrow ||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 \leqq ||\mathbf{x}||^2 + 2||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| + ||\mathbf{y}||^2 \Leftrightarrow$$

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) \leqq (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \Leftrightarrow$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \leqq (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| + (\mathbf{y}, \mathbf{y}) \Leftrightarrow$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{y}, \mathbf{x}) \leqq 2||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| \Leftrightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \overline{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \leqq 2||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot \mathrm{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqq 2||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| \Leftrightarrow \mathrm{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||.$$

Bizonyítani még nem sikerült, viszont a bal oldalak mellékesen kiadják, hogy
$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow ||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2$,
ami a Pitagorasz-tétel általánosítása, ha a merőlegességet a skaláris szorzat nulla voltával definiáljuk.
A háromszögegyenlőtlenség úgy nyer majd bizonyítást, hogy nála erősebb tételt igazolunk:

CAUCHY-EGYENLŐTLENSÉG: Legyen V euklideszi tér. Ekkor tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$-re $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leqq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$. Itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ lineárisan összefüggő.

Bizonyítás: I.: $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ Ö esetén valamelyik a másiknak számszorosa, pl. $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$. Ekkor $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = |(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x})| = |\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x})| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}||^2 = ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$.
II.: $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ L esetén biztos, hogy $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, és tetszőleges $\lambda \in T$ esetén $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Tehát 4.a/ és 4.b/ szerint

$$0 < (\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}, \mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}) + (\lambda\mathbf{y}, \mathbf{x}) + (\lambda\mathbf{y}, \lambda\mathbf{y}) = ||\mathbf{x}||^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}\{(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y})\} + ||\lambda\mathbf{y}||^2$$

$$= ||\mathbf{x}||^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}\{\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} + |\lambda|^2 ||\mathbf{y}||^2.$$

Mivel a szorzat valós részét nem tudjuk kényelmesen számolni, a paraméter választásával biztosítjuk, hogy valós legyen a szorzat, de még maradjon szabad választásunk is. Legyen tehát $\lambda = \alpha\overline{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$ alakú, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$0 < ||\mathbf{x}||^2 + 2 \cdot \mathrm{Re}\{\alpha\overline{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} + \alpha^2 |\overline{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}|^2 ||\mathbf{y}||^2 =$$

$$||\mathbf{x}||^2 + 2\alpha|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 + \alpha^2 |(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 ||\mathbf{y}||^2.$$

Az egyenlőtlenséget megszorozva $||\mathbf{y}||^2 > 0$-val, azt kapjuk, hogy

$$0 < ||\mathbf{x}||^2 ||\mathbf{y}||^2 + |(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \{2\alpha||\mathbf{y}||^2 + \alpha^2 ||\mathbf{y}||^4\},$$

azaz
$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 < ||\mathbf{x}||^2 ||\mathbf{y}||^2 + |(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \{(1 + \alpha||\mathbf{y}||^2)^2\}$. Végül az $\alpha = -\frac{1}{||\mathbf{y}||^2}$ adja a kívánt egyenlőtlenséget.

Ezután már definiálhatunk távolságot euklideszi térben: $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||$. Valós euklideszi térben $\mathbf{0}$-tól különböző vektorok $[0, \pi]$-beli hajlásszögét a térvektoros definíció kifordításával nyerhetjük: $\cos\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{||\mathbf{x}||\cdot||\mathbf{y}||}$. Ennek értelmességét a Cauchy-egyenlőtlenség biztosítja. Komplex euklideszi térre csak a merőlegességet (ortogonalitást) definiáljuk a már említett módon: $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, ha $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Így már tudjuk valamennyire általánosítani a térvektoroknál hasznos $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ rendszert:

DEFINÍCIÓ: Legyen V n-dimenziós euklideszi tér, $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ B V-ben. Az $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ ortogonális bázis (OB) V-ben, ha (bázis és) elemei páronként ortogonálisak. Az $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ ortonormált bázis (ONB) V-ben, ha elemei páronként ortogonálisak és normájuk 1.

TÉTEL: $n > 0$-ra tetszőleges n-dimenziós euklideszi térben létezik ortonormált bázis.

Bizonyítás: Először jegyezzük meg, hogy elég egy OB megadása: Ha $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n$ OB V-ben, akkor

$$\frac{\mathbf{f}_1}{||\mathbf{f}_1||}, ..., \frac{\mathbf{f}_n}{||\mathbf{f}_n||}$$

ONB V-ben. Egy $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ OB keresése a Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással történhet. Legyen $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n$ bázis V-ben, ezt fogjuk „ortogonalizálni”: Legyen $\mathbf{e}_1 = \mathbf{b}_1$. [Ha $\mathbf{b}_2$ merőleges $\mathbf{b}_1$-re, akkor persze folytathatjuk ugyanígy, de ha nem, akkor $\mathbf{b}_2$-t $\mathbf{e}_1$ alkalmas számszorosának hozzáadásával próbáljuk módosítani.] Tegyük fel, hogy már adott $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_i$ úgy, hogy páronként ortogonálisak és $\langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_i \rangle$ (és $i < n$). Ekkor keressük $\mathbf{e}_{i+1}$-et a következő alakban:

$$\mathbf{e}_{i+1} = \mathbf{b}_{i+1} + \lambda_1 \mathbf{e}_1 + ... + \lambda_i \mathbf{e}_i.$$

Az együtthatókat [melyeknek igazából egy $i + 1$ felső index is kellene] úgy próbáljuk meghatározni, hogy $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{i+1}$ páronként ortogonálisak legyenek, továbbá teljesüljön $\langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_{i+1} \rangle = \langle \mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_{i+1} \rangle$ is. Utóbbi ($\subseteqq$ és $\supseteqq$) egyszerű számolással adódik, a merőlegességet illetően pedig csak azt kell biztosítanunk, hogy az új $\mathbf{e}_{i+1}$ ortogonális legyen a korábbi $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_i$-re. Legyen tehát $1 \leqq j \leqq i$. Ekkor

$$(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{i+1}) = (\mathbf{e}_j, \mathbf{b}_{i+1} + \lambda_1 \mathbf{e}_1 + ... + \lambda_i \mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}_j, \mathbf{b}_{i+1}) + (\mathbf{e}_j, \lambda_1 \mathbf{e}_1) + ... + (\mathbf{e}_j, \lambda_i \mathbf{e}_i) =$$

$$(\mathbf{e}_j, \mathbf{b}_{i+1}) + \lambda_1 (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_1) + ... + \lambda_i (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i) = (\mathbf{e}_j, \mathbf{b}_{i+1}) + \lambda_j (\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j).$$

$\langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_i \rangle$ miatt $\langle \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_i \rangle$ dimenziója i, így $\mathbf{e}_j \neq \mathbf{0}$. Értelmes tehát a

$$\lambda_j = -\frac{(\mathbf{e}_j, \mathbf{b}_{i+1})}{(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j)}$$

választás, és biztosítja a kivánt merőlegességeket.

n-dimenziós V euklideszi terünk egy W alterének ortonormált bázisát kiegészíthetjük bázissá, erre alkalmazva az ortogonalizációs eljárást, az altér ortonormált bázisát kiegészíthetjük a tér ortonormált bázisává. Így tetszőleges $\mathbf{b} \in V$ felírható $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ alakban, ahol $\mathbf{b}_1 \in W$, a $\mathbf{b}_2$ pedig merőleges a W minden elemére. Ezt alkalmazhatjuk ellentmondásos lineáris egyenletrendszerre: $A = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m] \in \mathbb{C}^{n\times m}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n, A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, amikor $\mathbf{b} \notin \langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m \rangle$. Amikor nincs megoldás, akkor is jogos igény lehet valamiféle közelítő megoldás megadása: pl. a $\mathbb{C}^n$ $\mathbf{x}^*\mathbf{y}$ skaláris szorzatát rögzítve, olyan $\mathbf{x}$ vektor, amelyre $||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||$ kicsi, ha már nulla nem lehet! $W = \langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m \rangle$ esetére az előbbi $\mathbf{b}$ felbontást és a Pitagorasz-tétel általánosítását alkalmazva ($A\mathbf{x}, \mathbf{b}_1 \in W$ miatt):

$$||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||^2 = ||(A\mathbf{x} - \mathbf{b}_1) + (-\mathbf{b}_2)||^2 = ||A\mathbf{x} - \mathbf{b}_1||^2 + ||-\mathbf{b}_2||^2 \geqq ||\mathbf{b}_2||^2.$$

Itt egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $||A\mathbf{x} - \mathbf{b}_1|| = 0$, azaz $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$. Ez a lineáris egyenletrendszer viszont megoldható, mert $\mathbf{b}_1 \in W = \langle \mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m \rangle$. Ennek tetszőleges megoldása adja az eredeti egyenletrendszernél euklideszi normában a legjobb közelítést. [Igazolható, hogy pl. $A^{(\mathrm{g})}\mathbf{b}_1$ ilyen; ha pedig $X \in \mathbb{C}^{m \times n}$ olyan, hogy nemcsak $AXA = A$, hanem $XAX = X$ és $(AX)^* = AX$ is teljesül rá, akkor $X\mathbf{b}$ is jó, megúszva a vetítést.]