Lineáris algebra (A, B, C)
12. előadás
(vázlat)

DEFINÍCIÓ: Legyen n pozitív egész, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Az A mátrix **karakterisztikus polinom**ja: $k_A(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} |A - I_n\lambda|$.

Itt valós együtthatós, λ határozatlanú f polinomon egy $a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + ... + a_k\lambda^k$ alakú kifejezést értünk, ahol az a_i együtthatók valós számok, s az ilyen polinomok között a szokásos műveleteket és tulajdonságaikat ismertnek tételezzük fel. A határozatlan szó helyett változót mondani nem helyes, mert akkor keveredik a polinom és a polinomfüggvény fogalma. A most következő témákban azonban ez elviselhető hiba, f helyett is $f(\lambda)$-t írunk, ez sem helyes, de még mindig jobb, mintha valaki az f-et számnak képzeli. Ha a legnagyobb kitevőjű λ-hatvány együtthatója, az $a_k \neq 0$, akkor azt mondjuk, hogy a polinom foka k: $\deg f(\lambda) = k$. A λ a lineáris algebrában szokásos jelölés, akit idegesít, nyugodtan használhat helyette pl. x-et.

A polinomokról az érdeklődők tájékozódhatnak KISS EMIL: BEVEZETÉS AZ ALGEBRÁBA c. könyve (TYPOTEX, 2007) 2. és 3. fejezetéből.

Próbálkozzunk φ karakterisztikus polinomjának definíciójával is: $k_\varphi(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} k_{[\varphi]^{\mathbf{e}}}(\lambda)$, de felmerül a kérdés, hogy értelmes-e (nem függ-e a bázis választásától)? Ezt az értelmességet rögtön bebizonyítjuk, illik azonban előre jelezni, hogy a bizonyítás során olyasmiket is felhasználunk, amiket korábban nem bizonyítottunk, csupán utaltunk rájuk a determinánsok elméletének legvégén (10/4). A φ különböző bázisokban vett mátrixai $\mathbb{R}$ felett hasonlók, így ezt nézzük:
TÉTEL: $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $A \sim_{\mathbb{R}} B$ esetén $k_A(\lambda) = k_B(\lambda)$.
[Biz: $k_B(\lambda) = |B - I_n\lambda| = |D^{-1}AD - I_n\lambda| = |D^{-1}(A - I_n\lambda)D| = |D^{-1}||A - I_n\lambda||D| = |A - I_n\lambda||D^{-1}||D| = |A - I_n\lambda| = k_A(\lambda)$.]
Említettük már, hogy a síkon a kezdőpont körüli $+90°$-os forgatásnak nincs sajátvektora. Nézzük most, hogy látszik ez a karakterisztikus polinomból. φ mátrixa az $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ bázisban $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, ennek karakterisztikus polinomja $\begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$, melynek nincs valós gyöke! Látszólag tehát megsemmisültek a 11/3 oldali reményeink a hatványozás egyszerűsítésére. Ez az a pont, ahol már nem szabad megelégednünk a valós számokkal, s bizony az összes eddigi vizsgálatot át kellene gondolnunk pl. a $\mathbb{C}$ esetére, vagy akár tetszőleges számtestre. (A $\mathbb{C}$-ben a fenti polinomnak van gyöke: i és $-i$.) Az algebra alaptétele szerint minden legalább elsőfokú komplex együtthatós polinomnak van gyöke a komplex számok körében, ebből gyöktényezős alak is nyerhető, de 4-nél nagyobb fokszám esetén általában csak közelítő eljárással határozhatók meg a gyökök. Tehát nagy n esetén jó lenne valamilyen módon csökkenteni a fokszámot, ha ez lehetséges. Elvi lehetőséget adhat pl. a szokásos háromdimenziós terünkben egy a kezdőponton átmenő síkra való φ merőleges vetítés vizsgálata: ennek sajátértékei: 0 és 1, míg a $\varphi^2 = \varphi$ alapján vadul felírt $\lambda^2 = \lambda$ egyenlet gyökei épp a 0 és az 1, s a fokszám eggyel kisebb, mint a dimenzió. Ezt az ötletet megkíséreljük általánosítani:
DEFINÍCIÓ: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, V n-dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett, $\varphi \in \mathcal{H}om(V,V)$, továbbá $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + ... + a_k\lambda^k$, ahol $a_i \in \mathbb{R}\,(i = 0, 1, ..., k)$. Ekkor
$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + ... + a_k A^k$, $f(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} a_0\varepsilon + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + ... + a_k\varphi^k$. Az A gyöke az $f(\lambda)$-nak, ha $f(A) = \mathbf{0}$; a φ gyöke az $f(\lambda)$-nak, ha $f(\varphi) = o$ (itt o a $\mathcal{H}om(V,V)$ nullvektora: $o(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\ \ \forall \mathbf{v} \in V$-re).

A definícióban szereplő A-hoz, illetve φ-hez könnyű találni olyan polinomot, amelynek ő gyöke, s ez nem a nullapolinom (van nullától különböző együtthatója). Az A esetét részletezve: a 6/3 oldali tétel szerint az $\mathbb{R}^{n\times n}$ dimenziója n^2, így $I_n, A, A^2, A^3, ..., A^{n^2}$ biztosan Ö (n^2+1 darab). Ez ad egy legfeljebb n^2 fokú polinomot, aminek az A gyöke. Ezzel azonban a fokszám nem csökkent, sőt! Bonyolultabb bizonyítást használva azért mégsem veszítenénk, de a további állításokat csak bizonyítás nélkül mondjuk ki:

HAMILTON–CAYLEY-TÉTEL:
a) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén $k_A(A) = \mathbf{0}$;
b) Ha V n-dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett és $\varphi \in \mathcal{H}om(V,V)$, akkor $k_\varphi(\varphi) = o$.

Így már találtunk n-edfokú polinomot, aminek az A (ill. φ) gyöke, s lehetséges, hogy létezik még kisebb fokú is, a legalacsonyabb fokút választjuk ki, ezt még normáljuk (elosztjuk a legmagasabb fokú tagjának együtthatójával), s elnevezzük minimálpolinomnak, jelölése $m_A(\lambda)$, illetve $m_\varphi(\lambda)$:
TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén $\exists!\ m_A(\lambda)$ valós együtthatós, normált polinom, melynek az A gyöke: $m_A(A) = \mathbf{0}$, és ha egy valós együtthatós, nem nulla $f(\lambda)$-ra $f(A) = \mathbf{0}$, akkor $\deg m_A(\lambda) \leqq \deg f(\lambda)$.

Az egyértelműség bizonyításához úgy lehetne eljutni, hogy a maradékos osztás tételének segítségével belátnánk, hogy
ÁLLÍTÁS: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén, ha egy valós együtthatós, nem nulla $f(\lambda)$-ra $f(A) = \mathbf{0}$, akkor $m_A(\lambda)$ osztója $f(\lambda)$-nak.

Hasonlóan nyerhető az $m_\varphi(\lambda)$ fogalma is.

KÖVETKEZMÉNY: Ha $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, V n-dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett, $\varphi \in \mathcal{H}om(V,V)$, akkor $m_A(\lambda) \mid k_A(\lambda)$ és $m_\varphi(\lambda) \mid k_\varphi(\lambda)$.

ÁLLÍTÁS: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, V n-dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett, $\varphi \in \mathcal{H}om(V,V)$. Ekkor az A minden jobb oldali sajátértéke gyöke $m_A(\lambda)$-nak és φ minden sajátértéke gyöke $m_\varphi(\lambda)$-nek.

TÉTEL:
a) Legyen V n-dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett, $\varphi \in \mathcal{H}om(V,V)$. Ekkor:
$\exists$ SB (φ sajátvektoraiból álló bázis) $\Leftrightarrow$ $m_\varphi(\lambda)$ minden komplex gyöke $\mathbb{R}$-ben van és egyszeres.
b) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén:
A diagonalizálható $\mathbb{R}$ felett $\Leftrightarrow$ $m_A(\lambda)$ minden komplex gyöke $\mathbb{R}$-ben van és egyszeres.

Ha a fenti tételben mindenütt az $\mathbb{R}$ helyébe egy T számtestet írunk, akkor is érvényes állítást kapunk. $T = \mathbb{C}$ esetén persze egyszerűbb a tétel, csak a minimálpolinom gyökeinek egyszeressége kell. Felvetődik a kérdés, mit lehet tenni, ha ez nem teljesül. Bebizonyítható, hogy minden $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hasonló a $\mathbb{C}$ felett egy blokk-diagonális mátrixhoz, melyben a diagonálisbeli blokkok $\begin{bmatrix} \gamma & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \gamma & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & \gamma \end{bmatrix}$ alakúak (a méret és $\gamma \in \mathbb{C}$ változhat, hisz a γ-k épp a sajátértékek eme speciális felső háromszög mátrixban), amelyekkel még mindig tűrhetően lehet számolni. A fenti blokk neve Jordan blokk, az ilyenekből összerakott, A-hoz $\mathbb{C}$ felett hasonló blokk-diagonális mátrix az A Jordan-féle normálalakja.