2008. november 24/25.

Lineáris algebra (A, B, C)
11. előadás
(vázlat)

V_1 és V_2 $\mathbb{R}$ feletti vektorterek esetén foglalkoztunk már $\varphi : V_1 \to V_2$ lineáris leképezésekkel. Különösen fontosak lesznek azok a lineáris leképezések, amelyeknél $V_1 = V_2 = V$, ezek a V vektortér LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓi. Ilyenkor megállapodunk abban, hogy a mátrix definíciójában mindkét helyre ugyanazt a bázist vesszük: Ha $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V-ben, $\varphi : V \to V$ lineáris transzformáció, akkor $[\varphi]^{\mathbf{e}} \stackrel{\text{def}}{=} [\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{e}}$.
DEFINÍCIÓ: Legyen V_1 és V_2 vektortér $\mathbb{R}$ felett; $\mathcal{H}om(V_1, V_2)$ jelölje a V_1-ből V_2-be képező vektortérhomomorfizmusok halmazát.
$\varphi, \psi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$ esetén legyen $\varphi + \psi : V_1 \to V_2$ úgy, hogy $\mathbf{u} \in V_1$-re $(\varphi + \psi)(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{u})$. $\lambda \in \mathbb{R}$ és $\varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$ esetén legyen $\lambda\varphi : V_1 \to V_2$ úgy, hogy $\mathbf{u} \in V_1$-re $(\lambda\varphi)(\mathbf{u}) = \lambda(\varphi(\mathbf{u}))$.
Könnyen látható, hogy az imént definiált összeg és számszoros is $\mathcal{H}om(V_1, V_2)$-ben van, továbbá azt is, hogy $\mathcal{H}om(V_1, V_2)$ vektortér az $\mathbb{R}$ felett a fenti műveletekre.

TÉTEL: Legyen V_1 és V_2 véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett. Ekkor
$$V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2.$$

Bizonyítás: Legyen $\dim V_1 = n$. Az $n = 0$ eset triviális mindkét irányban. Tegyük fel, hogy $n > 0$.
$\Rightarrow$: $\exists\, \varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$, mely bijektív. Legyen $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V_1-ben. *Állítás:* $\varphi(\mathbf{e}_1), ..., \varphi(\mathbf{e}_n)$ bázis V_2-ben. [biz: G: Legyen $\mathbf{v}' \in V_2$. φ szürjektivitása miatt $\exists \mathbf{u} \in V_1 : \mathbf{v}' = \varphi(\mathbf{u})$. Ezt a bázissal felírva: $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + ... + u_n\mathbf{e}_n$, így a két művelettartást felhasználva $\mathbf{v}' = \varphi(u_1\mathbf{e}_1 + ... + u_n\mathbf{e}_n) = u_1\varphi(\mathbf{e}_1) + ... + u_n\varphi(\mathbf{e}_n)$. L: Tegyük fel, hogy $\alpha_1\varphi(\mathbf{e}_1) + ... + \alpha_n\varphi(\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}'$, azaz $\varphi(\alpha_1\mathbf{e}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}' = \varphi(\mathbf{0})$. A φ injektivitása miatt $\alpha_1\mathbf{e}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$, így már minden $\alpha_i = 0$.]
$\Leftarrow$: Legyen $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V_1-ben, $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_n$ bázis V_2-ben. Az egyértelmű kiterjesztési tétel alapján $\exists!\, \varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$, melyre $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{f}_i$ $(i = 1, ..., n)$. *Állítás:* φ bijektív. [biz: *szürjektivitás:* Legyen $\mathbf{v}' \in V_2$. Ezt felírhatjuk V_2 bázisával: $\mathbf{v}' = \beta_1\mathbf{f}_1 + ... + \beta_n\mathbf{f}_n = \beta_1\varphi(\mathbf{e}_1) + ... + \beta_n\varphi(\mathbf{e}_n) = \varphi(\beta_1\mathbf{e}_1 + ... + \beta_n\mathbf{e}_n)$. *injektivitás:* Tudjuk már (fent), hogy φ injektív $\Leftrightarrow \mathcal{K}er\,\varphi = \{\mathbf{0}\}$. Tegyük fel, hogy $\mathbf{x} \in \mathcal{K}er\,\varphi$, így $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}'$. $\mathbf{x}$ felírása a bázissal $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + ... + x_n\mathbf{e}_n$. Tehát $\mathbf{0}' = \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + ... + x_n\mathbf{e}_n) = x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + ... + x_n\varphi(\mathbf{e}_n) = x_1\mathbf{f}_1 + ... + x_n\mathbf{f}_n$, így már minden $x_i = 0$.]

DIMENZIÓÖSSZEFÜGGÉS: Legyen V_1 és V_2 vektortér $\mathbb{R}$ felett, $\varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$.
Ha V_1 véges dimenziós, akkor $\dim \mathcal{I}m\,\varphi + \dim \mathcal{K}er\,\varphi = \dim V_1$.
[Itt φ rangja: $r(\varphi) = \dim \mathcal{I}m\,\varphi$; φ defektusa: $d(\varphi) = \dim \mathcal{K}er\,\varphi$.]

Bizonyítás: Legyen $\dim V_1 = n$. Az $n = 0$ eset most is triviális. Tegyük fel, hogy $n > 0$. Legyen $k = \dim \mathcal{K}er\,\varphi$. $0 < k < n$ esetén veszünk egy $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ bázist $\mathcal{K}er\,\varphi$-ben, ez L a V_1-ben, így kiegészíthető bázissá: $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_{n-k}$ bázis V_1-ben. *Állítás:* $\varphi(\mathbf{b}_1), ..., \varphi(\mathbf{b}_{n-k})$ bázis $\mathcal{I}m\,\varphi$-ben. [biz: G: $\mathcal{I}m\,\varphi$ elemei $\varphi(\mathbf{u})$ alakúak, ahol $\mathbf{u} \in V_1$. $\mathbf{u}$-t a bázissal felírva és beírva: $\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\alpha_1\mathbf{a}_1 + ... + \alpha_k\mathbf{a}_k + \beta_1\mathbf{b}_1 + ... + \beta_{n-k}\mathbf{b}_{n-k}) = \alpha_1\varphi(\mathbf{a}_1) + ... + \alpha_k\varphi(\mathbf{a}_k) + \beta_1\varphi(\mathbf{b}_1) + ... + \beta_{n-k}\varphi(\mathbf{b}_{n-k}) = \beta_1\varphi(\mathbf{b}_1) + ... + \beta_{n-k}\varphi(\mathbf{b}_{n-k})$. L: Tegyük fel, hogy $\gamma_1\varphi(\mathbf{b}_1) + ... + \gamma_{n-k}\varphi(\mathbf{b}_{n-k}) = \mathbf{0}'$. Ekkor $\varphi(\gamma_1\mathbf{b}_1 + ... + \gamma_{n-k}\mathbf{b}_{n-k}) = \mathbf{0}'$, tehát $\gamma_1\mathbf{b}_1 + ... + \gamma_{n-k}\mathbf{b}_{n-k} \in \mathcal{K}er\,\varphi$, így $\gamma_1\mathbf{b}_1 + ... + \gamma_{n-k}\mathbf{b}_{n-k} = \delta_1\mathbf{a}_1 + ... + \delta_k\mathbf{a}_k$ alakú, emiatt már minden $\gamma_i = 0$.] A $k = 0$ esetben $\mathbf{a}$-k nélkül ugyanígy dolgozhatunk a V_1 tetszőleges $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_n$ bázisával. A $k = n$ esetben $\mathcal{K}er\,\varphi = V_1$, így $\mathcal{I}m\,\varphi = \{\mathbf{0}'\}$.

Vektortérhomomorfizmusok szorzatát is könnyen definiálhatjuk kompozícióként, csak a baloperátoros írásmód miatt a sorrendre figyelni kell:
DEFINÍCIÓ: Legyen V_1, V_2 és V_3 vektortér $\mathbb{R}$ felett; $\varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$, $\psi \in \mathcal{H}om(V_2, V_3)$. Legyen $\psi\varphi : V_1 \to V_3$ úgy, hogy $\mathbf{u} \in V_1$-re $(\psi\varphi)(\mathbf{u}) = \psi(\varphi(\mathbf{u}))$.
Könnyen látható, hogy a definiált $\psi\varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_3)$.

SZORZÁSTÉTEL: Legyen V_1, V_2 és V_3 vektortér $\mathbb{R}$ felett, dimenziójuk rendre n, k, s (pozitív egészek); $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V_1-ben; $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_k$ bázis V_2-ben; $\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_s$ bázis V_3-ban; $\varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$, $\psi \in \mathcal{H}om(V_2, V_3)$. Ekkor

$$[\psi\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{g}} = [\psi]^{\mathbf{f};\mathbf{g}}[\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}}.$$

Bizonyítás: Emlékezzünk vissza a definícióra: $[\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} [[\varphi(\mathbf{e}_1)]_{\mathbf{f}}, ..., [\varphi(\mathbf{e}_n)]_{\mathbf{f}}] \in \mathbb{R}^{k\times n}$. Így minden szóbajövő i-re

$$\varphi(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{k} {}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e};\mathbf{f}} \mathbf{f}_j.$$

A másik két esetre felírva ennek megfelelőjét, azt kapjuk, hogy

$$\psi(\mathbf{f}_j) = \sum_{t=1}^{s} {}_t[\psi]_j^{\mathbf{f};\mathbf{g}} \mathbf{g}_t, \quad (\psi\varphi)(\mathbf{e}_i) = \sum_{t=1}^{s} {}_t[\psi\varphi]_i^{\mathbf{e};\mathbf{g}} \mathbf{g}_t,$$

$$(\psi\varphi)(\mathbf{e}_i) = \psi(\varphi(\mathbf{e}_i)) = \psi\left(\sum_{j=1}^{k} {}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e};\mathbf{f}} \mathbf{f}_j\right) = \sum_{j=1}^{k} {}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e};\mathbf{f}} \psi(\mathbf{f}_j) = \sum_{j=1}^{k} {}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e};\mathbf{f}} \sum_{t=1}^{s} {}_t[\psi]_j^{\mathbf{f};\mathbf{g}} \mathbf{g}_t =$$

$$\sum_{t=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{k} {}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e};\mathbf{f}} {}_t[\psi]_j^{\mathbf{f};\mathbf{g}}\right)\mathbf{g}_t = \sum_{t=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{k} {}_t[\psi]_j^{\mathbf{f};\mathbf{g}} {}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e};\mathbf{f}}\right)\mathbf{g}_t.$$

A bázissal való felírás egyértelműségét felhasználva, a $\mathbf{g}_t$ együtthatóit vizsgálva:
${}_t[\psi\varphi]_i^{\mathbf{e};\mathbf{g}} = \sum_{j=1}^{k} {}_t[\psi]_j^{\mathbf{f};\mathbf{g}} {}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e};\mathbf{f}}$, ez pedig épp a szorzatmátrix t-edik sorának i-edik eleme.
Lineáris transzformációk esetén most azt nézzük meg, hogyan változik a mátrix, ha a bázist változtatjuk.

TÉTEL (ÚJ BÁZISRA VALÓ ÁTTÉRÉS): Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett; $\dim V = n > 0$; $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V-ben; $\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n$ bázis V-ben. Ekkor $\exists! \tau \in \mathcal{H}om(V, V) : \tau(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i$ ($i = 1, ..., n$). Legyen $D = [\tau]^{\mathbf{e}}$. Ekkor D invertálható, és tetszőleges $\varphi \in \mathcal{H}om(V, V)$ esetén

$$[\varphi]^{\mathbf{e}'} = D^{-1}[\varphi]^{\mathbf{e}}D.$$

Bizonyítás: Mivel $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ is, és $\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n$ is bázis V-ben, az egyértelmű kiterjesztési tételt két szereposztásban is használhatjuk, így $\exists!\, \tau, \gamma \in \mathcal{H}om(V, V) : \tau(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i, \gamma(\mathbf{e}'_i) = \mathbf{e}_i$ ($i = 1, ..., n$). Így $\gamma(\tau(\mathbf{e}_i)) = \gamma(\mathbf{e}'_i) = \mathbf{e}_i$ minden i-re, tehát $\gamma\tau = \varepsilon$, ahol ε a V identitása: $\varepsilon(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ $\forall \mathbf{v} \in V$-re. A szorzástételt használva (minden bázis helyébe $\mathbf{e}$-t írva): $[\gamma]^{\mathbf{e}}[\tau]^{\mathbf{e}} = [\gamma\tau]^{\mathbf{e}} = [\varepsilon]^{\mathbf{e}} = I_n$, tehát $D = [\tau]^{\mathbf{e}}$ invertálható. $\varphi \in \mathcal{H}om(V, V)$ esetén minden szóbajövő i-re

$$\varphi(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} {}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e}} \mathbf{e}_j, \quad \varphi(\mathbf{e}'_i) = \sum_{j=1}^{n} {}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e}'} \mathbf{e}'_j, \quad \varphi(\tau(\mathbf{e}_i)) = \sum_{j=1}^{n} {}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e}'} \tau(\mathbf{e}_j),$$

$$\gamma(\varphi(\tau(\mathbf{e}_i))) = \gamma\left(\sum_{j=1}^{n} {}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e}'}\tau(\mathbf{e}_j)\right) = \sum_{j=1}^{n} {}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e}'}\gamma(\tau(\mathbf{e}_j)) = \sum_{j=1}^{n} {}_j[\varphi]_i^{\mathbf{e}'}\mathbf{e}_j.$$

Tehát

$$[\varphi]^{\mathbf{e}'} = [\gamma\varphi\tau]^{\mathbf{e}} = [\gamma]^{\mathbf{e}}[\varphi]^{\mathbf{e}}[\tau]^{\mathbf{e}} = D^{-1}[\varphi]^{\mathbf{e}}D.$$

DEFINÍCIÓ: $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén azt mondjuk, hogy az A hasonló $\mathbb{R}$ felett a B-hez (jelölés: $A \sim_{\mathbb{R}} B$), ha létezik olyan invertálható $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, melyre $B = D^{-1}AD$.
Eszerint egy $\mathbb{R}$ feletti vektortér lineáris transzformációjának különböző bázisokban vett mátrixai hasonlók $\mathbb{R}$ felett. Ha a lineáris transzformáció $\mathbf{e}$ bázisban vett mátrixa felcserélhető D-vel, akkor az $\mathbf{e}'$ bázisban is ugyanaz lesz a mátrix. Mivel a mátrixszorzás nem kommutatív, ezért sok esetben változni fog a mátrix, amit esetleg (szomorkodás helyett) kihasználhatunk csúnya számolás rövidítésére.
Tegyük fel, hogy adott egy csúnya (a főátlón kívül sok nullától különböző elemet tartalmazó) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixunk, melyet egy nagy k hatványra kell emelnünk. Ekkor pl. $\mathbb{R}^n$-nek megadhatjuk olyan lineáris transzformációját, melynek a triviális bázisban A a mátrixa. Keresgélünk olyan bázist, ahol szebb a mátrix, pl. diagonális (ha szerencsénk van). Ekkor az A az $\mathbb{R}$ felett hasonló egy diagonális mátrixhoz.
DEFINÍCIÓ: Az A diagonalizálható $\mathbb{R}$ felett, ha $\mathbb{R}$ felett hasonló egy diagonális mátrixhoz.
Ha tehát szerencsénk volt, akkor van olyan invertálható D, hogy

$D^{-1}AD = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}$. Ekkor $D^{-1}ADD^{-1}AD = D^{-1}A^2D$ mintájára

$(D^{-1}AD)^k = D^{-1}A^kD$, azaz $A^k = D(D^{-1}AD)^kD^{-1} =$

$$D\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}\right)^k D^{-1} = D\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n^k \end{bmatrix}D^{-1}.$$

Most vizsgáljuk meg, mennyire nagy szerencse egy n dimenziós vektortér φ lineáris transzformációjához olyan bázist találni, amelyben a mátrixa diagonális: az $\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n$ bázisnak azt kell tudnia, hogy $\varphi(\mathbf{e}'_i) = \lambda_i\mathbf{e}'_i$, azaz minden báziselem saját számszorosába képeződjön. Persze, $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, de a $\mathbf{0}$ nem lehet báziselem! Ha síkon ($n = 2$) a kezdőpont körüli $+90°$-os forgatást nézzük, erről belátható, hogy lineáris transzformáció, de egyetlen nullvektortól különböző vektort sem visz a saját számszorosába, nemhogy egy bázist.
Először tehát azt kellene tisztázni, mikor van egyáltalán jó vektor (kis szerencse), aztán ilyenekből bázis (nagy szerencse). A bevezető példát (10/4) $n = m$ esetére nézve, mátrixokra is megfogalmazható a kérdés, itt azonban elvileg több formában is. Legjobb, ha együtt szerepel a háromféle „sajátvektor”–„sajátérték” definíciója.
DEFINÍCIÓ: Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett, $\dim V = n > 0$, $\varphi \in \mathcal{H}om(V, V)$.
Az $\mathbf{u} \in V$ **sajátvektora** φ-nek, ha
1./ $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$,
2./ $\exists\, \lambda_0 \in \mathbb{R} : \varphi(\mathbf{u}) = \lambda_0\mathbf{u}$.
Ilyenkor a λ_0 az $\mathbf{u}$ sajátvektorhoz tartozó sajátértéke a φ-nek.
DEFINÍCIÓ: Legyen n pozitív egész, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Az $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ **jobb oldali sajátvektora** A-nak, ha

1./ $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,
2./ $\exists\, \lambda_0 \in \mathbb{R} \,:\, A\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{x}$.
Ilyenkor a λ_0 az $\mathbf{x}$ j.o. sajátvektorhoz tartozó j.o. sajátértéke az A-nak.
DEFINÍCIÓ: Legyen n pozitív egész, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Az $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{1\times n}$ **bal oldali sajátvektora** A-nak, ha
1./ $\mathbf{y} \neq \mathbf{0} = [0, ..., 0]$,
2./ $\exists\, \lambda_0 \in \mathbb{R} \,:\, \mathbf{y}A = \lambda_0 \mathbf{y}$.
Ilyenkor a λ_0 az $\mathbf{y}$ b.o. sajátvektorhoz tartozó b.o. sajátértéke az A-nak.
Gyorsan redukáljuk a háromféle keresést kettőre: $\mathbf{y}A = \lambda_0\mathbf{y} \Leftrightarrow A^\top \mathbf{y}^\top = \lambda_0 \mathbf{y}^\top$ alapján az A bal oldali sajátvektorainak és sajátértékeinek keresése visszavezethető az $A^\top$ jobb oldali sajátvektorainak és sajátértékeinek keresésére.
A következő ekvivalencia-sorozat azt mutatja majd, hogy először a lehetséges λ_0 értékeket célszerű megkeresni (ez lesz a problémás), azután már csak homogén lineáris egyenletrendszer (nemtriviális) megoldását kívánja azon sajátvektorok megkeresése, amelyekhez a λ_0 sajátérték tartozik.
Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ felett; $\dim V = n > 0$; $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V-ben; $\varphi \in \mathcal{H}om(V, V)$; $A = [\varphi]^{\mathbf{e}}$. $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ esetén
λ_0 sajátértéke φ-nek $\Leftrightarrow \exists\, \mathbf{u} \in V,\, \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \,:\, \varphi(\mathbf{u}) = \lambda_0 \mathbf{u} \Leftrightarrow$
$\exists\, \mathbf{u} \in V,\, \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \,:\, [\varphi(\mathbf{u})]_{\mathbf{e}} = \lambda_0 [\mathbf{u}]_{\mathbf{e}} \Leftrightarrow \exists\, \mathbf{u} \in V,\, \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \,:\, [\varphi]^{\mathbf{e}} [\mathbf{u}]_{\mathbf{e}} = \lambda_0 [\mathbf{u}]_{\mathbf{e}} \Leftrightarrow$
$\exists\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \,:\, A\mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{x} \Leftrightarrow \lambda_0$ jobb oldali sajátértéke A-nak $\Leftrightarrow$
$\exists\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \,:\, A\mathbf{x} - \lambda_0 \mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow$
$\exists\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \,:\, (A - I_n\lambda_0)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow |A - I_n\lambda_0| = 0$.
Itt

$$|A - I_n\lambda_0| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_0 & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1}-\lambda_0 & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn}-\lambda_0 \end{vmatrix} =$$

$(-1)^n\lambda_0^n + (-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+a_{33}+...+a_{nn})\lambda_0^{n-1} +$„CSÚF”$+|A|$, ahol $a_{11}+a_{22}+...+a_{nn} = \mathrm{Tr}(A)$, az A mátrix nyoma (trace, Spur), a főátlóban lévő elemek összege, a CSÚF jelző pedig arra utal, hogy $n \geqq 3$ és $n-2 \geqq j \geqq 1$ esetén a λ_0^j együtthatóját nehéz felírni, mert nemcsak a főátlóból származhat.
Az már kiderült, hogy először a sajátértékeket kell megkeresnünk. $\mathbb{R}$ feletti n dimenziós vektortér φ lineáris transzformációjának sajátértékeit, ill. $\mathbb{R}$ feletti $n \times n$-es A mátrix jobb oldali sajátértékeit úgy találhatjuk meg, hogy φ valamely bázisban vett mátrixára a $|[\varphi]^{\mathbf{e}} - I_n\lambda_0| = 0$, ill. A-ra az $|A - I_n\lambda_0| = 0$ valós gyökeit keressük meg. Mivel $|A^\top - I_n\lambda_0| = |A - I_n\lambda_0|$, azért az A bal oldali és jobb oldali sajátértékei megegyeznek.
Az is leolvasható, hogy pl. felső háromszög mátrix sajátértékei a főátlóban lévő elemek.

$$|A - I_n\lambda_0| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_0 & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1}-\lambda_0 & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn}-\lambda_0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^n\lambda_0^n + (-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+a_{33}+...+a_{nn})\lambda_0^{n-1} + \text{„CSÚF”} + |A|.$$

Ezzel a λ_0-nak egy n-edfokú polinomja adódott.