2008. november 17/18.

Lineáris algebra (A, B, C)
10. előadás
(vázlat)

Az utolsó sorában majdnem végig 0 mátrix determinánsára vonatkozó tételt könnyű általánosítani arra az esetre, amikor az utolsó sor helyett az i-edik sorról van szó, és benne az egyetlen nullától különböző elem a j-edik helyen áll. $n \geqq 2$ esetén az i-edik sort $n-i$ cserével alulra vihetjük, majd a j-edik oszlopot $n-j$ cserével az utolsó helyre vihetjük. (Az alábbi blokkok közül a $*$ olyanokat jelöl, amelyek 1 oszlopból állnak és tartalmuk közömbös az eredmény szempontjából.)

$$\begin{vmatrix} & E & & * & & F & \\ 0 & \dots & 0 & a_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ & G & & * & & H & \end{vmatrix} = (-1)^{n-i} \begin{vmatrix} & E & & * & & F & \\ & G & & * & & H & \\ 0 & \dots & 0 & a_{ij} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{n-i}(-1)^{n-j} \begin{vmatrix} E & F & * \\ G & H & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & a_{ij} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} E & F \\ G & H \end{vmatrix} = a_{ij}(-1)^{i+j} \begin{vmatrix} E & F \\ G & H \end{vmatrix}.$$

Az E, F, G, H blokkok (már aminek jut hely) téglalap alakúak, de a végén egymáshoz csúsznak, és egy $(n-1) \times (n-1)$-es mátrixot alkotnak.
Tekintsük **tetszőleges** mátrixra is a megfelelő összecsúszott rész determinánsát az i-edik sor és a j-edik oszlop elhagyásával keletkező mátrix determinánsaként: Az

$$A = \begin{bmatrix} & E & & * & & F & \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ & G & & * & & H & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mátrix i-edik sora j-edik eleméhez tartozó aldeterminánsa
$\mathrm{aldet}_{ij}(A) \overset{\mathrm{def}}{=} \begin{vmatrix} E & F \\ G & H \end{vmatrix}$,
az i-edik sora j-edik eleméhez tartozó **előjelezett** aldeterminánsa pedig
$A_{ij} \overset{\mathrm{def}}{=} (-1)^{i+j} \mathrm{aldet}_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} E & F \\ G & H \end{vmatrix}$.
[Ez az irodalomban a gyakoribb jelölés, s eltér a jegyzetbelitől!] Ha a mátrix elemeinek helyére beírjuk a helynek megfelelő $(-1)^{i+j}$-t, az ún. sakktábla-szabályt kapjuk, a főátlóban mindenütt $+1$-gyel. Fentiek segítségével tetszőleges $n \times n$-es ($n \geqq 2$) valós elemű mátrix determinánsát visszavezethetjük n darab $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsának kiszámítására. Választunk egy i-t az $\{1, 2, ..., n\}$-ből, s ezt rögzítjük.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + 0 + \dots + 0 & \dots & 0 + \dots + a_{ij} + \dots + 0 & \dots & 0 + \dots + 0 + a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n}|B_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\mathrm{aldet}_{ij}(B_j) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\mathrm{aldet}_{ij}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij},$$

mivel a B_j mátrixok és az A mátrix csak az i-edik sorban különböznek, azt pedig a fenti aldeterminánsok képzése során elhagyjuk. A végeredmény $|A|$ kifejtése az i-edik sor szerint, hasonlóan bizonyítható a j-edik oszlop szerinti kifejtés:
KIFEJTÉSI TÉTEL: $n \geqq 2,\ \ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén
a) Tetszőleges $1 \leqq i \leqq n$ esetén

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij};$$

b) Tetszőleges $1 \leqq j \leqq n$ esetén

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

Ha az i-edik sor szerinti kifejtés képletében az egyik i-t kicseréljük k-ra, akkor is ki tudjuk számolni az összeget, csakhogy $k \neq i$ esetén 0 lesz az eredmény tetszőleges mátrixra:
FERDE KIFEJTÉSI TÉTEL: $n \geqq 2,\ \ i, k \in \{1, 2, ..., \},\ i \neq k,\ \ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0.$$

[Bizonyítás: Legyen $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olyan mátrix, mely az A-tól egyedül a k-adik sorában tér el, ott pedig legyen az A i-edik sora! Ekkor B-nek van két azonos sora, így $|B| = 0$. Alkalmazzuk B-re a kifejtési tételt a k-adik sor szerint:

$$0 = |B| = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}B_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}.]$$

Alkalmazásként $A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \ |A| \neq 0$ esetén A^{-1}-re explicit formulát adhatunk. Legyen $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$, éspedig ${}_j[X]_k = A_{kj}/|A|$ minden szóbajövő j, k-ra. Mivel

$${}_i[AX]_k = \sum_{j=1}^{n} {}_i[A]_j\ {}_j[X]_k = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}/|A| = \delta_{ik} = {}_i[I_n]_k,$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás nélkül mondjuk ki a következő tételeket ($\det(A) \stackrel{\text{def}}{=} |A|$).
CRAMER-SZABÁLY: $A = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $|A| \neq 0$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\exists!\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, melyre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, továbbá az $\mathbf{x}$ j-edik komponense ($j = 1, ..., n$)

$$x_j = \frac{\det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{b}, ..., \mathbf{a}_n])}{\det([\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_j, ..., \mathbf{a}_n])}.$$

Vandermonde-determináns és kifejtése:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & ... & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & ... & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geqq i > j \geqq 1} (a_i - a_j).$$

SZORZÁSTÉTEL: $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow |AB| = |A||B|$.

Tudjuk már, hogy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén $|A| \neq 0 \Leftrightarrow \varrho(A) = n \Leftrightarrow \exists\, A^{-1}$.
$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ esetén is tudunk kapcsolatot a rang és a négyzetes részmátrixok determinánsa között. ($j \times k$-as **részmátrix**: j sor és k oszlop kiválasztásával a metszéspontokba kerülő elemek alkotta $j \times k$-as mátrix.)
TÉTEL: $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ és $\varrho(A) = r \geqq 1$ esetén A-nak van olyan $r \times r$-es részmátrixa, melynek determinánsa $\neq 0$, viszont minden $(r+1) \times (r+1)$-es részmátrix determinánsa 0.
[Biz: Mivel a rang r, van r darab oszlop, mely L. Csak ezeket tartva meg, a keletkezett $n \times r$-es mátrix oszloprangja r, így sorrangja is r, van tehát benne r darab sor, mely L. Csak ezeket tartva meg, a keletkezett $r \times r$-es mátrix rangja r, így determinánsa $\neq 0$. Tekintsünk most egy $(r+1) \times (r+1)$-es részmátrixot. Ez $r+1$ oszlopból származik, mely Ö (hisz a rang r), így részmátrixunk $r+1$ oszlopa is Ö, és részmátrixunk determinánsa 0.]
Az elsőként idézett tételt érdemes még átfogalmazni lineáris egyenletrendszerekre, éspedig a homogén esetre (amikor $\mathbf{b} = \mathbf{0}$), mivel nagy szükségünk lesz később nemtriviális ($\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) megoldásra, ha van ilyen.
TÉTEL: Legyen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Az $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van nemtriviális megoldása, ha $|A| = 0$.
[Biz: Nemtriviális megoldás létezése azzal ekvivalens, hogy az A oszlopvektorrendszere lineárisan összefüggő.]
Bizonyítás nélkül említettük már a szorzástételt, most bizonyítási lehetőségeket vázolunk röviden.
SZORZÁSTÉTEL: $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} \Rightarrow |AB| = |A||B|$.
[Az utolsó sorában majdnem végig 0 négyzetes mátrix determinánsára vonatkozó tételt a következőképpen is lehetne általánosítani (a $*$ most olyan téglalap alakú blokkot jelöl, melynek tartalma közömbös az eredmény szempontjából): Legyen $C \in \mathbb{R}^{r\times r}$ és $D \in \mathbb{R}^{s\times s}$. Ekkor $\begin{vmatrix} C & * \\ \mathbf{0} & D \end{vmatrix} = |C||D|$ és $\begin{vmatrix} C & \mathbf{0} \\ * & D \end{vmatrix} = |C||D|$. Így $|A||B| = \begin{vmatrix} A & \mathbf{0} \\ -I_n & B \end{vmatrix}$. Most a $-I_n$ elemeit használva determinánstartó átalakításokkal kiirthatjuk B-t, azaz nullmátrix kerül a helyére azon az áron, hogy a felette lévő nullmátrix megváltozik, éspedig épp AB kerül a helyére. Viszont sorcserék révén $\begin{vmatrix} A & AB \\ -I_n & \mathbf{0} \end{vmatrix} = (-1)^n \begin{vmatrix} -I_n & \mathbf{0} \\ A & AB \end{vmatrix} = |AB|$.
Egy másik bizonyítási ötlet: Az $|AB|$-ban a mátrixszorzás definíciója alapján mindenütt n tagú összegek vannak, csak az a baj, hogy összeg determinánsát nem számolhatjuk

tagonként. Egy sorban lévő összegekkel azonban már tudunk bánni (a többi marad változatlan), elég soronként más és más futóindexet használni, s a szummákat egymás után kivihetjük:

$$|AB| =$$

$$\begin{vmatrix} \sum_{k_1=1}^n a_{1k_1}b_{k_1 1} & \dots & \sum_{k_1=1}^n a_{1k_1}b_{k_1 n} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k_n=1}^n a_{nk_n}b_{k_n 1} & \dots & \sum_{k_n=1}^n a_{nk_n}b_{k_n n} \end{vmatrix} = \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_n=1}^n \begin{vmatrix} a_{1k_1}b_{k_1 1} & \dots & a_{1k_1}b_{k_1 n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{nk_n}b_{k_n 1} & \dots & a_{nk_n}b_{k_n n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_n=1}^n a_{1k_1} \cdot \dots \cdot a_{nk_n} \begin{vmatrix} b_{k_1 1} & \dots & b_{k_1 n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k_n 1} & \dots & b_{k_n n} \end{vmatrix} = \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_n=1}^n a_{1k_1} \cdot \dots \cdot a_{nk_n} \begin{vmatrix} {}_{k_1}[B] \\ \vdots \\ {}_{k_n}[B] \end{vmatrix}.$$

Az összeg olyan tagjai, amelyekben a $k_1, \dots, k_n$ között van két egyező, biztos nullát adnak (van két azonos sor!). A megmaradó tagok már az $1, 2, \dots, n$ permutációira való összegezéssel írhatók (becsempészve a hiányzó hatványt):

$$= \sum_{\substack{k_1,\dots,k_n \\ (1,\dots,n)}} (-1)^{I(k_1,\dots,k_n)} a_{1k_1} \cdot \dots \cdot a_{nk_n} (-1)^{I(k_1,\dots,k_n)} \begin{vmatrix} {}_{k_1}[B] \\ \vdots \\ {}_{k_n}[B] \end{vmatrix}.$$

A $(-1)^{I(k_1,\dots,k_n)} \begin{vmatrix} {}_{k_1}[B] \\ \vdots \\ {}_{k_n}[B] \end{vmatrix}$ cserék — mint 9/6-on — révén épp $|B|$, így előtte már $|A|$ áll.]

A valós elemű négyzetes mátrixok determinánsáról szóló seregnyi tételünk még kevés az alkalmazásokhoz, legalább említenünk kell, hogy mi történik, ha a négyzetes mátrixunk elemeit nem $\mathbb{R}$-ből, hanem más struktúrából vesszük. Ha pl. $\mathbb{C}$-ből vesszük az elemeket, akkor hasonló definícióval dolgozhatunk, s ugyanolyan tételeket nyerhetünk. Ugyanez mondható, ha számtestből vesszük az elemeket (**számtest**: a $\mathbb{C}$ olyan részhalmaza, melyben benne van a 0 és az 1, továbbá zárt a $\mathbb{C}$-ben tanult összeadásra, kivonásra, szorzásra és nullától különböző számmal való osztásra). Ha az elemeket egy $\mathcal{R}$ **gyűrű**ből vesszük, akkor egységelem hiányában már a determináns definíciójával is lehet gond, de ezt még megoldhatjuk azzal, hogy amikor -1 szorzó kellene, akkor az utána lévő szorzat ellentettjét vesszük; de az egységmátrix azért nagyon hiányozna. A kommutativitás hiánya még kellemetlenebb lenne: $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0$, de $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ba$, ami lehet 0-tól különböző egy nem kommutatív gyűrűben, így már sajnos $|A^\top| \overset{\acute{a}lt}{\neq} |A|$. Ha az elemeket egy $\mathcal{R}$ **egységelemes, kommutatív és nullosztómentes gyűrű**ből vesszük, akkor már érvényesek lesznek a korábbi eredményeink közül mindazok, ahol nem használtunk sem osztást, sem osztásra épülő fogalmat a bizonyításban. [A két egyező sor esetére vonatkozó tétel (9/4) bizonyítása már elakad, a tétel egy hosszabb bizonyítással mégis igazolható.]

Lineáris leképezések

Legyen most $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ és vizsgáljuk meg a következő leképezés kapcsolatát a vektortérműveletekkel: $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ esetén $\varphi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.
$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \Rightarrow \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{y})$;
$\lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \Rightarrow \varphi(\lambda\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda\varphi(\mathbf{x})$.

A példában összeg képe a képek összege volt, számszoros képe pedig a kép számszorosa.
DEFINÍCIÓ: Legyen V_1 és V_2 vektortér $\mathbb{R}$ felett, $\varphi : V_1 \to V_2$.
φ **vektortérhomomorfizmus** [vagy *homogén lineáris leképezés*, vagy
lineáris leképezés, vagy *művelettartó leképezés* $+$, $\lambda\cdot$*-ra*], ha
1./ $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_1 \Rightarrow \varphi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v})$;
2./ $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in V_1 \Rightarrow \varphi(\lambda\mathbf{u}) = \lambda\varphi(\mathbf{u})$.
Ha egy lineáris leképezés, azaz vektortérhomomorfizmus netán bijektív, akkor vektortérizomorfizmusnak hívjuk.
Egy lineáris leképezés bázison tetszőlegesen előírható, ez viszont már meg is határozza:
EGYÉRTELMŰ KITERJESZTÉSI TÉTEL: Legyen V_1 és V_2 vektortér az $\mathbb{R}$ felett;
$\dim V_1 = n > 0$; $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V_1-ben; $\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_n$ tetszőleges vektorok V_2-ben. Ekkor $\exists!\,\varphi : V_1 \to V_2$ vektortérhomomorfizmus, melyre $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i\ (i = 1, ..., n)$.
[Biz: !: Tegyük fel, hogy φ jó, s használjuk 1./ és 2./-t. Legyen $\mathbf{x} \in V_1, \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n$. Ekkor $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x_1\mathbf{e}_1 + (x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n)) = \varphi(x_1\mathbf{e}_1) + \varphi(x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n) = ... = \varphi(x_1\mathbf{e}_1) + \varphi(x_2\mathbf{e}_2) + ... + \varphi(x_n\mathbf{e}_n) = x_1\varphi(\mathbf{e}_1) + x_2\varphi(\mathbf{e}_2) + ... + x_n\varphi(\mathbf{e}_n) = x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + ... + x_n\mathbf{w}_n$. $\exists$: Legyen $\mathbf{x} \in V_1, \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n$. Ekkor $\varphi(\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + ... + x_n\mathbf{w}_n$ megfelelő lesz.]
A félév időbeosztása miatt az alábbiakban kevés bizonyítás lesz. Ha V_1 és V_2 $\mathbb{R}$ feletti n, illetve k dimenziós vektorterek (n és k pozitív egész), akkor mátrixokat is használhatunk a vektortérhomomorfizmusok megadására [a baloperátoros írásmódhoz a következő definíció illik]:
DEFINÍCIÓ: Ha $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$ bázis V_1-ben; $\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_k$ bázis V_2-ben; $\varphi : V_1 \to V_2$ vektortérhomomorfizmus, akkor a φ mátrixa az $\mathbf{e};\mathbf{f}$ bázispárban
$[\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}} \overset{\text{def}}{=} [[\varphi(\mathbf{e}_1)]_{\mathbf{f}}, ..., [\varphi(\mathbf{e}_n)]_{\mathbf{f}}] \in \mathbb{R}^{k\times n}$.
A definícióból adódik, hogy tetszőleges $\mathbf{x} \in V_1$ esetén $[\varphi(\mathbf{x})]_{\mathbf{f}} = [\varphi]^{\mathbf{e};\mathbf{f}}[\mathbf{x}]_{\mathbf{e}}$.
Tapasztaltuk már, hogy az azonos dimenziójú vektorterekkel ugyanúgy tudtunk dolgozni, a magyarázat: van köztük vektortérizomorfizmus (ilyenkor a két vektortér közé $\cong$ jelet teszünk). Bizonyítható:
TÉTEL: Legyen V_1 és V_2 véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ felett. Ekkor
$V_1 \cong V_2 \Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$.
DEFINÍCIÓ: Legyen V_1 és V_2 vektortér $\mathbb{R}$ felett; $\varphi \in \mathcal{H}om(V_1, V_2)$.
φ **képtere**: $\mathcal{I}m\,\varphi \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{v}' \mid \mathbf{v}' \in V_2\ \exists\mathbf{u} \in V_1\ \varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{v}'\}$;
φ **magtere**: $\mathcal{K}er\,\varphi \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in V_1\ \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}'\}$.
Jegyezzük meg, hogy $\varphi(\mathbf{0}) = \varphi(0\mathbf{0}) = 0\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$. Könnyen igazolható, hogy $\mathcal{I}m\,\varphi \leqq V_2$ és $\mathcal{K}er\,\varphi \leqq V_1$. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{I}m\,\varphi = V_2 \Leftrightarrow \varphi$ szürjektív. Mivel $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \varphi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{0}' \Leftrightarrow \mathbf{x}-\mathbf{y} \in \mathcal{K}er\,\varphi$, ezért az is igaz, hogy φ injektív $\Leftrightarrow \mathcal{K}er\,\varphi = \{\mathbf{0}\}$. Ha V_1 véges dimenziós, akkor érvényes a következő **dimenzióösszefüggés**:
$\dim \mathcal{I}m\,\varphi + \dim \mathcal{K}er\,\varphi = \dim V_1$.
[Itt φ rangja: $r(\varphi) = \dim \mathcal{I}m\,\varphi$; φ defektusa: $d(\varphi) = \dim \mathcal{K}er\,\varphi$.]