2008. szeptember 8/9.

Lineáris algebra (A, B, C)
1. előadás
(vázlat)

Bevezetőül lineáris egyenletrendszerekkel foglalkozunk. Mindenki találkozott már két egyenletből álló kétismeretlenes lineáris egyenletrendszerekkel, most nézünk néhány „közeli" példát: három egyenletből álló három ismeretlenes lineáris egyenletrendszerek megoldásait keressük a valós számok körében (az ismeretlenek x, y, z, vagy x_1, x_2, x_3), majd négy ismeretlennel is próbálkozunk. A megoldás alapötlete az lesz, hogy az első egyenletben szereplő első ismeretlen segítségével (már ha tényleg szerepel, azaz együtthatója nem nulla) a többi egyenletből kiküszöböljük ezt az ismeretlent az első egyenlet alkalmas számszorosának hozzáadásával, majd ezt folytatjuk a következő ismeretlennel, stb. Ha ezt egy nulla együttható akadályozná, cserélni próbálhatjuk az egyenleteket. A konkrét számolást esetleg megkönnyíti, ha a használandó nem nulla együtthatóval végigosztjuk (azaz reciprokával végigszorozzuk) az őt tartalmazó egyenletet. Ha már nem tudjuk folytatni, akkor alulról felfelé haladva visszahelyettesítéssel próbáljuk leolvasni a megoldást illetve megoldásokat. A vázolt eljárás neve Gauss-féle kiküszöbölés vagy latinosan Gauss-elimináció (angolul Gaussian elimination).

$$\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \\ x+2y+3z &=& 2 \\ x+4y+9z &=& 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \\ y+2z &=& 1 \\ 3y+8z &=& 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \\ y+2z &=& 1 \\ 2z &=& -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} z &=& -\frac{1}{2} \\ y &=& 2 \\ x &=& -\frac{1}{2} \end{array}$$

Ebben a példában EGYETLEN MEGOLDÁS adódott. Foglaljuk most össze, milyen átalakításokat engedtünk meg:
1. Két egyenletet felcserélünk.
2. Az egyik egyenletet egy nullától különböző valós számmal végigszorozzuk.
3. Egyik egyenlethez egy másik egyenlet valós számszorosát hozzáadjuk.

A fenti példában persze az 1. átalakításra nem volt szükség, a 2. csak a végén volt (a visszahelyettesítés pedig 3. típusú). Hogy legvégül a megoldást kapjuk, az biztosítja, hogy a megengedett átalakításaink mindegyike ekvivalens átalakítás: az átalakítás utáni egyenletrendszernek pontosan ugyanazok a megoldásai, mint az átalakítás előttinek.

$$\begin{array}{rcl} 2x_1+3x_2+4x_3 &=& 1 \\ 3x_1+4x_2+5x_3 &=& 2 \\ 4x_1+5x_2+6x_3 &=& 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x_1+\frac{3}{2}x_2+2x_3 &=& \frac{1}{2} \\ 3x_1+4x_2+5x_3 &=& 2 \\ 4x_1+5x_2+6x_3 &=& 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x_1+\frac{3}{2}x_2+2x_3 &=& \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x_2-x_3 &=& \frac{1}{2} \\ -x_2-2x_3 &=& 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1+\frac{3}{2}x_2+2x_3 &=& \frac{1}{2} \\ x_2+2x_3 &=& -1 \\ -x_2-2x_3 &=& 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x_1+\frac{3}{2}x_2+2x_3 &=& \frac{1}{2} \\ x_2+2x_3 &=& -1 \\ 0 &=& 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x_3 &=& a \in \mathbb{R} \\ x_2 &=& -1-2a \\ x_1 &=& 2+a \end{array}$$

Ebben a példában az x_3-ra nem adódott külön megkötés, x_3 ún. szabad változó, ezért választhattuk őt tetszőleges a valós számnak, ezzel pedig már kifejezhettük a többit. VÉGTELEN SOK MEGOLDÁS adódott!

$$\begin{array}{rcl} 2x_1+3x_2+4x_3 &=& 1 \\ 3x_1+4x_2+5x_3 &=& 2 \\ 4x_1+5x_2+6x_3 &=& 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x_1+\frac{3}{2}x_2+2x_3 &=& \frac{1}{2} \\ 3x_1+4x_2+5x_3 &=& 2 \\ 4x_1+5x_2+6x_3 &=& 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x_1+\frac{3}{2}x_2+2x_3 &=& \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x_2-x_3 &=& \frac{1}{2} \\ -x_2-2x_3 &=& -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1+\frac{3}{2}x_2+2x_3 &=& \frac{1}{2} \\ x_2+2x_3 &=& -1 \\ -x_2-2x_3 &=& -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x_1+\frac{3}{2}x_2+2x_3 &=& \frac{1}{2} \\ x_2+2x_3 &=& -1 \\ 0 &=& -2 \end{array} \qquad \text{NINCS MEGOLDÁS!}$$

A következő egyenletrendszer nagyon hasonlít a legelsőhöz, mégis változik a helyzet:

$$\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3+x_4 &=& 1 \\ x_1+2x_2+3x_3+4x_4 &=& 2 \\ x_1+4x_2+9x_3+16x_4 &=& 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3+x_4 &=& 1 \\ x_2+2x_3+3x_4 &=& 1 \\ 3x_2+8x_3+15x_4 &=& 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3+x_4 &=& 1 \\ x_2+2x_3+3x_4 &=& 1 \\ 2x_3+6x_4 &=& -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x_1+x_2+x_3+x_4 &=& 1 \\ x_2+2x_3+3x_4 &=& 1 \\ x_3+3x_4 &=& -\frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x_4 &=& a\in\mathbb{R} \\ x_3 &=& -\frac{1}{2}-3a \\ x_2 &=& 2+3a \\ x_1 &=& -\frac{1}{2}-a \end{array}$$

Végtelen sok megoldás adódott. Ennek alapján már mindenki maga gyárthat olyan lineáris egyenletrendszert, amelyben több szabad változó is van. Szabad változó nemcsak a „végén” lehet:

$$\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \\ x+y+2z &=& 2 \\ x+y+3z &=& 3 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \\ z &=& 1 \\ 2z &=& 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x+y+z &=& 1 \\ z &=& 1 \\ 0 &=& 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} z &=& 1 \\ y &=& a\in\mathbb{R} \\ x &=& -a \end{array}$$

A fentiekben előfordult $0=0$ „fölösleges” sor, viszont a $0=-2$ ún. „tiltott” vagy „tilos” sor. A megoldhatóság szükséges és elégséges feltétele, hogy ilyen tiltott sor ne forduljon elő. Végül még táblázatokba rendezhetjük a megoldások leolvasása előtti egyenletrendszerek együtthatóit, kiírva a nullákat is, szaggatott vonallal elkülönítve kiírjuk a jobb oldali számokat is:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1/2 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ezek mindegyike ún. LÉPCSŐS ALAK (echelon form). Lehetne még „felfelé” is kiküszöbölni, eredménye REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK (reduced echelon form). A fentiek részletesebben (és általánosabban) is olvashatók FREUD RÓBERT: LINEÁRIS ALGEBRA c. könyvében (ELTE Eötvös Kiadó) a 3. fejezetben. Ott ugyan szerepel átalakításként a fölösleges sor elhagyása is, de most az volt a célunk, hogy a táblázat-alak ne változzon az átalakítások során. Más célok esetén más kisebb-nagyobb eltérések is lehetnek

a Gauss-elimináció tárgyalása során. GERGÓ LAJOS: NUMERIKUS MÓDSZEREK c. könyvében (ELTE Eötvös Kiadó), mely a II. éves „Numerikus módszerek" c. tárgy jegyzete, a 2. átalakítás nem szerepel, hiszen arra valójában nincs szükség. Most azért szerepeltettük mégis, hogy egy későbbi számolási szabály (elemi bázistranszformáció) már ismerős legyen. (Eltérés a lépcsős alak definíciójában is előfordul, pl. David M. Bloom, Linear Algebra and Geometry (Cambridge University Press) könyvében.)
Most még írjuk fel a három egyenletből álló négy ismeretlenes lineáris egyenletrendszer általános alakját:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4 &= b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4 &= b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned}$$

Itt az a_{ij} együtthatók és a b_i-k adott valós számok. Ha $a_{11}\neq 0$, akkor elkezdhetjük a fenti átalakításokat, de a folytatás lehetősége már az elején is áttekinthetetlen a csúf együtthatók miatt:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4 &= b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4 &= b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1+\tfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\tfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3+\tfrac{a_{14}}{a_{11}}x_4 &= \tfrac{b_1}{a_{11}}\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4 &= b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1+\tfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\tfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3+\tfrac{a_{14}}{a_{11}}x_4 &= \tfrac{b_1}{a_{11}}\\ (a_{22}-\tfrac{a_{12}}{a_{11}}a_{21})x_2+(a_{23}-\tfrac{a_{13}}{a_{11}}a_{21})x_3+(a_{24}-\tfrac{a_{14}}{a_{11}}a_{21})x_4 &= (b_2-\tfrac{b_1}{a_{11}}a_{21})\\ (a_{32}-\tfrac{a_{12}}{a_{11}}a_{31})x_2+(a_{33}-\tfrac{a_{13}}{a_{11}}a_{31})x_3+(a_{34}-\tfrac{a_{14}}{a_{11}}a_{31})x_4 &= (b_3-\tfrac{b_1}{a_{11}}a_{31}) \end{aligned}$$

Később n egyenlet és m ismeretlen esetére is szeretnénk áttekintést adni a megoldásokról (ha vannak), többek között tisztázzuk majd, mikor lehet a legelső példához hasonlóan végigcsinálni a Gauss-eliminációt úgy, hogy pontosan egy megoldás adódjon.
Előkészítésül felelevenítjük a középiskolában a térvektorokról tanultakat. A "tér-" jelző pusztán a későbbi általánosításoktól való megkülönböztetésre szolgál. Ha A és B a geometriai tér tetszőleges pontjai, akkor az A kezdőpontú és B végpontú irányított szakaszt $\overrightarrow{AB}$-vel jelöljük, ennek hossza $|\overrightarrow{AB}|$, speciálisan $|\overrightarrow{AA}|=0$, $\overrightarrow{AA}$ iránya tetszőleges. Két irányított szakaszt akkor tekintünk egyenlőnek, ha kezdőpontjuk is, végpontjuk is egyezik. Az irányított szakaszokat vektoroknak is hívjuk, de a vektorok egyenlőségének definíciója más: két irányított szakasz, mint vektor akkor egyenlő, ha hosszuk és irányuk megegyezik. Jelölések: $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\ldots$ térvektorok, az $\mathbf{a}$ hossza $|\mathbf{a}|$.
Műveletek térvektorokkal: összeadás a vektorok egymáshoz illesztésével (vagy parallelogramma-szabállyal), valós számmal („skalárral") való szorzás. Nullvektor: $\mathbf{0}$, $\mathbf{a}$ ellentettje: $(-\mathbf{a})$, az $\mathbf{a}$-val azonos hosszúságú, de vele ellentétes irányú vektor.
Műveleti tulajdonságok (BIZONYÍTHATÓK): $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ (a vektorösszeadás kommutativitása); $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ (asszociativitás); $\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$; $(-\mathbf{a})+\mathbf{a}=\mathbf{0}$; $(\lambda\mu)\mathbf{a}=\lambda(\mu\mathbf{a})$ („asszociativitás"); $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$ és $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$ (a két disztributivitás); $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$.
Tételkék: $\lambda\mathbf{a}=\mathbf{0}\Longleftrightarrow\lambda=0$ vagy $\mathbf{a}=\mathbf{0}$. $\forall\mathbf{a},\mathbf{b}\ \exists!\mathbf{x}$, melyre $\mathbf{b}+\mathbf{x}=\mathbf{a}$, jelölése $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ („vég minusz kezdet"). $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})=\mathbf{a}+(-1)\mathbf{b}$. Háromszögegyenlőtlenségek: $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\leqq|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$, $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|\geqq||\mathbf{a}|-|\mathbf{b}||$.
Térvektorok párhuzamosságának definíciója természetes, de az egysíkúsággal vigyázni kell! Az $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\ldots$ térvektorok egysíkúak, ha elhelyezhetők (felrajzolhatók) egy síkban.
SÍKBELI TÉTEL: $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{v}$ térvektorok; $\mathbf{a}\not\parallel\mathbf{b}$; $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{v}$ egysíkúak $\Rightarrow\exists!\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\,:\,\mathbf{v}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$.
Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{a},\mathbf{b}$ „bázis a síkban", továbbá, hogy a $\mathbf{v}$ koordinátái az $\mathbf{a},\mathbf{b}$

bázisban α, β.
TÉRBELI TÉTEL: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{v}$ térvektorok; $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ nem egysíkúak $\Rightarrow \exists! \, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \, : \, \mathbf{v} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$.
Ilyenkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ „bázis a térben”, továbbá, hogy a $\mathbf{v}$ koordinátái az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ bázisban α, β, γ. Jelölése: $[\mathbf{v}]_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$.
DEFINÍCIÓ: Legyen $k \geqq 1$; $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ térvektorrendszer [rövidítve: tvr; a „rendszer” arra utal, hogy a vektorok között lehetnek egyenlők, akár mind egyenlő lehet]; $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$. Az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ tvr $\lambda_1, ..., \lambda_k$ együtthatós LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_k\mathbf{a}_k.$$

Az eredmény egy térvektor (a kifejezést azért nem zárójeleztük, mert a térvektorok összeadásának asszociativitásából bebizonyítható, hogy az összeg tetszőlegesen zárójelezhető).
Az $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_k$ tvr TRIVIÁLIS LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA: $0\mathbf{a}_1 + ... + 0\mathbf{a}_k$. Bármely tvr triviális lineáris kombinációja $= \mathbf{0}$.
DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ tvr LINEÁRISAN ÖSSZEFÜGGŐ (rövidítve: Ö), ha
$\exists \; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$, nem mind 0, melyekre $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ (azaz, ha a vektorrendszernek létezik nullvektort adó nemtriviális lineáris kombinációja).
DEFINÍCIÓ: Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ tvr LINEÁRISAN FÜGGETLEN (rövidítve: L), ha
$\{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k \in \mathbb{R}; \mu_1\mathbf{a}_1 + \mu_2\mathbf{a}_2 + ... + \mu_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k = 0\}$ (azaz, ha a vektorrendszernek CSAK a triviális lineáris kombinációja ad nullvektort).