1.
$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{x-2y}-\frac{2}{2x-y} &= 3 \\ \frac{5}{2x-y}+\frac{2}{2y-x} &= -5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A &:= \frac{1}{x-2y} \\ B &:= \frac{1}{2x-y} - \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A-2B &= 3 \\ 5B-2A &= -5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} B &= 1 \\ A &= 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x-y &= 1 \\ x-2y &= \tfrac{1}{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{x=\tfrac{3}{5} \quad y=\tfrac{1}{5}}$$

2.
$$\left.\begin{aligned} 8^{2x+1} &= 32\cdot 2^{4y-1} \\ 5\cdot 5^{x-y} &= \sqrt{25^{2y+1}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2^{6x+3} &= 2^{4y+4} \\ 5^{x-y} &= 5^{2y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 6x+3 &= 4y+4 \\ x-y &= 2y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 6x-4y &= 1 \\ x &= 3y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 14y &= 1 \\ x &= \tfrac{3}{14} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{x=\frac{3}{14} \quad y=\frac{1}{14}}$$

3. Legyen (a_n) számtani sorozat, $a_1+a_2+a_3=-12$, $a_1\cdot a_2\cdot a_3=80$. Határozza meg a sorozat első 50 tagjának összegét !

$$(a_2-d)+a_2+(a_2+d)=-12 \Rightarrow 3a_2=-12 \Rightarrow \boxed{a_2=-4} \Rightarrow (-4-d)\cdot(-4)\cdot(-4+d)=80 \Rightarrow 16-d^2=-20 \Rightarrow$$

$$d^2=36\ . \quad \sum_{k=1}^{50} a_k = \frac{a_1+a_{50}}{2}\cdot 50 = (\,2a_1+49d\,)\cdot 25 \quad \Rightarrow$$

Megoldások : **I.** $d=6$, $a_1=-10$, $\sum_{k=1}^{50} a_k = (-20+49\cdot 6)\cdot 25 = (-10+49\cdot 3)\cdot 50 = 137\cdot 50 = \boxed{6850}$,

II. $d=-6$, $a_1=2$, $\sum_{k=1}^{50} a_k = (4+49\cdot(-6))\cdot 25 = (2-49\cdot 3)\cdot 50 = -145\cdot 50 = \boxed{-7250}$.

1.
$$\left.\begin{aligned} x^2+xy &= 210 \\ y^2+xy &= 231 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (x+y)^2 &= 441 \\ y\cdot(y+x) &= 231 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{I.} \quad x+y=21, \quad 21y=231 \\ &\text{II.} \quad x+y=-21, \quad -21y=231 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\boxed{y=11 \quad x=10} \\ &\boxed{y=-11 \quad x=-10} \end{aligned}$$

2.
$$\left.\begin{aligned} 3^y\cdot 9^x &= 81 \\ \ln(x+y)^2 - \ln x &= 2\ln 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3^y\cdot 3^{2x} &= 3^4 \\ \ln\frac{(x+y)^2}{x} &= \ln 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x+y &= 4 \\ (x+y)^2 &= 9x \end{aligned}\right\} \Rightarrow (4-x)^2 = 9x \Rightarrow x^2-17x+16 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &\text{I.} \quad \boxed{x=1 \quad y=2} \\ &\text{II.} \quad \boxed{x=16 \quad y=-28} \end{aligned}$$

3. Egy (a_n) számtani sorozat első három tagjának összege 21. Ha az elsőhöz 6 -ot, másodikhoz 13-at és a harmadikhoz 30 -at adunk, akkor egy mértani sorozat egymás utáni tagjait kapjuk. Mi a számtani sorozat ?

$$21=a_1+a_2+a_3=(a_2-d)+a_2+(a_2+d)=3a_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_2=7}\ .$$

A mértani sorozat második tagja $a_2+13=20$, az első három tagjának összege pedig $21+(6+13+30)=70$,

így $\frac{20}{q}+20+20q=70$, $\Rightarrow$ $2q^2-5q+2=0$, $q_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4}$.

Megoldások : **I.** $q=2$, $a_1=\frac{20}{q}-6=10-6=4$, $d=3$. A számt. sorozat: 4, 7, 10, ...

II. $q=\frac{1}{2}$, $a_1=\frac{20}{q}-6=40-6=34$. $d=-27$. A számt. sorozat: 34, 7, − 20, ...

1. $\left.\begin{aligned} \frac{2y+4}{6}+\frac{3-x}{4} &= 3 \\ \frac{2}{x-3}-\frac{6}{y+2} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{y+2}{3}-\frac{x-3}{4} &= 3 \\ \frac{1}{x-3} &= \frac{3}{y+2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow x-3 = \frac{y+2}{3} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x-3-\frac{x-3}{4} &= 3 \\ \frac{3}{4}\cdot(x-3) &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{x=7 \quad y=10}$.

2. $\left.\begin{aligned} (\log_8 x)\cdot(\log_8 y) &= \frac{1}{3} \\ \log_4 x - \log_4 y &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (\log_8 4+\log_8 y)\cdot(\log_8 y) &= \frac{1}{3} \\ x &= 4y \end{aligned}\right\} \Rightarrow (\log_8 4^3+3\cdot\log_8 y)\cdot(\log_8 y) = 1 \Rightarrow$

$3\cdot(\log_8 y)^2+2\cdot(\log_8 y)-1 = 0 \Rightarrow \log_8 y = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2\pm 4}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ I. $\log_8 y = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}, \quad y=2 \Rightarrow \boxed{x=8 \quad y=2}$

II. $\log_8 y = \frac{-2-4}{6} = -1, \quad y=\frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2} \quad y=\frac{1}{8}}$

3. Egy (a_n) mértani sorozat első 10 tagjának összege 6138. Az első tagból kivonva a tizenegyedik tagot az eredmény 3069. Mennyi a sorozat harmadik tagja?

$\sum_{k=1}^{10} a_k = a_1\cdot\frac{q^{10}-1}{q-1} = 6138 \Rightarrow a_1-a_1\cdot q^{10} = a_1\cdot(1-q^{10}) = 3069 \Rightarrow \frac{-3069}{q-1} = 6138 \Rightarrow -\frac{3069}{6138} = q-1$

$\Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{2}}$. $a_1\cdot(1-\frac{1}{1024}) = 3069 \Rightarrow a_1 = \frac{3069}{1023}\cdot 1024 = 3\cdot 1024$, $\boxed{a_1 = 3072} \Rightarrow a_3 = a_1\cdot q^2$, $\boxed{a_3 = 768}$.

2010. november 19. Péntek **II. Zárthelyi B csoport -- Megoldások** Bev. Mat. BME

1. $\left.\begin{aligned} \frac{3-y}{4}+\frac{x+2}{3} &= 3 \\ \frac{6}{x+2}-\frac{4}{2y-6} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{x+2}{3}-\frac{y-3}{4} &= 3 \\ \frac{6}{x+2} &= \frac{2}{y-3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y-3 = \frac{x+2}{3} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y-3-\frac{y-3}{4} &= 3 \\ \frac{3}{4}\cdot(y-3) &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{x=10 \quad y=7}$.

2. $\left.\begin{aligned} 9^{-1}\cdot 9^{x/y} - 27\cdot 27^{y/x} &= 0 \\ \log_3(x-2)-\log_3(2-y) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3^{2\cdot(-1+x/y)} &= 3^{3\cdot(1+y/x)} \\ x-2 &= 2-y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} -2+\frac{2x}{y} &= 3+\frac{3y}{x} \\ x+y &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{2x}{y} = 5+\frac{3y}{x}, \quad A:=\frac{x}{y}$

$\left.\begin{aligned} 2A^2-5A-3 &= 0 \\ A = \frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4} &= \frac{5\pm 7}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ I. $\frac{x}{y} = 3 \Rightarrow 3y+y = 4$; II. $\frac{x}{y} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x-2x = 4$ $\Rightarrow$ $\boxed{x = 3 \quad y=1}$; $x = -4$ nem lehetséges!

3. Egy (a_n) mértani sorozat első három tagjának összege 63. Ha az első taghoz 3-at adunk, a harmadikból 30-at kivonunk, akkor egy számtani sorozat egymást követő tagjait kapjuk. Mi a mértani sorozat?

A módosítás után kapott számtani sorozat első három tagjának összege $3a_2 = 63+(3-30) = 36 \Rightarrow \boxed{a_2 = 12}$. $\Rightarrow$

A mértani sorozatra: $\frac{12}{q}+12+12q = 63 \Rightarrow 4q^2-17q+4 = 0, \quad q_{1,2} = \frac{17\pm\sqrt{289-64}}{8} = \frac{17\pm 15}{8}$. $\Rightarrow$

Megoldások: **I.** $q=4, \quad a_1 = \frac{a_2}{q} = 3,$ A mértani sorozat: 3, 12, 48, ... (Számtani: 6, 12, 18, ...)

II. $q=\frac{1}{4}, \quad a_1 = \frac{a_2}{q} = 48,$ A mértani sorozat: 48, 12, 3, ... (Számt.: 51, 12, −27, ...) .