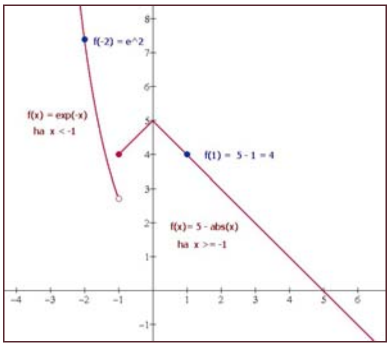
2009. október 29. Bev. Mat. 1. zárthelyi Megoldások A. csoport 90 perc.

1. $(\sin 60^\circ)^{\sqrt[3]{8}} + \frac{3^{10}+3^{11}}{3^{12}-3^{10}} + \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_{\sqrt{3}} 5} = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1+3}{3^2-1} + (\sqrt{3})^{-4\cdot\log_{\sqrt{3}} 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + 5^{-4} = \frac{7500}{10^4} + \frac{5000}{10^4} + \frac{16}{10^4} = 1.2516$.

2. $g(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1}$, $x_0 = 3$. Hány %-kal változik a függvény értéke, ha x_0 értékét 5 %-kal növeljük ? Meghatározandó $\lambda \in \mathbf{R}$, melyre $g(1.05\cdot 3) = \lambda \cdot g(3)$. $g(x) = \frac{x\cdot(x-1)}{x^2-1} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \lambda = \frac{1.05\cdot 3}{4.15}\cdot\frac{4}{3} = \frac{1.05\cdot 4}{4.15} = \frac{21\cdot 4}{83} = \frac{84}{83} \Rightarrow \frac{100}{83}$ **%-kal nő a fv.érték.**

3. $f(x) = \begin{cases} 5-|x| & , \text{ ha } x \ge -1 \\ e^{-x} & , \text{ ha } x < -1 \end{cases}$. Rajzolja fel a függvényt ! $f(1) = ?$ $f(-2) = ?$

$f(1) = 4$, $f(-2) = e^2$



4. $\frac{\sqrt{x+1}\ +\ 2}{\sqrt{x+1}\ -\ 1} = \frac{x+1}{x-2}$, $x = ?$ $1+\frac{3}{\sqrt{x+1}-1} = 1+\frac{3}{x-2} \Rightarrow x-2 = \sqrt{x+1}-1$,

$(\sqrt{x+1})^2 - \sqrt{x+1} - 2 = 0$, $t^2 - t - 2 = 0$ gyökei -1, 2 $\Rightarrow \sqrt{x+1} = 2$ (neg. nem lehet) $\Rightarrow x = 3$.

5. $\frac{x+3}{x-4} + \frac{22}{x^2-16} = \frac{7x+6}{x+4} - \frac{3}{x-4}$, $x = ?$ $\frac{x+6}{x-4} + \frac{22}{x^2-16} - \frac{7x+6}{x+4} = 0 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow (x+6)(x+4) + 22 - (7x+6)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 10x + 46 - 7x^2 + 22x + 24 = 0 \Leftrightarrow$

$6x^2 - 32x - 70 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 + 12\cdot 35}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{4^3 + 3\cdot 35}}{3} = \frac{8 \pm 13}{3} \Rightarrow$ **Megoldások :** $x = 7$ és $x = -\frac{5}{3}$

6. $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0$, $x = ?$

$\Leftrightarrow 2((\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^4 x\cdot\cos^2 x - 3\sin^2 x\cdot\cos^4 x) - 3((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cdot\cos^2 x) + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$2(1 - 3\sin^2 x\cdot\cos^2 x) - 3(1 - 2\sin^2 x\cdot\cos^2 x) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 - 6\sin^2 x\cdot\cos^2 x - 3 + 6\sin^2 x\cdot\cos^2 x + 1 = 0$. Ez $\forall x \in \mathbf{R}$ teljesül.

2009. október 29. Bev. Mat. 1. zárthelyi Megoldások B. csoport 90 perc.

1. $(-\cos 30^\circ)^{\sqrt[3]{-8}} + 5000000\cdot 0.000002 + 0.25^{\log_2 3} = (\frac{\sqrt{3}}{2})^{-2} + 5\cdot 10^6\cdot 2\cdot 10^{-6} + (2^{-2})^{\log_2 3} = \frac{4}{3} + 10 + 3^{-2} = \frac{103}{9}$

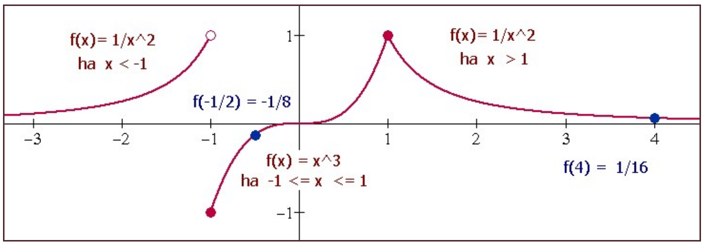
2. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x}$, $x_0 = 2$. Hány %-kal változik a függvény értéke, ha x_0 értékét 5 %-kal csökkentjük ? Meghatározandó $\lambda \in \mathbf{R}$, melyre

$f(0.95\cdot 2) = \lambda\cdot f(2)$. $f(x) = \frac{x^2-1}{x\cdot(x-1)} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow \lambda = \frac{2.9}{1.9}\cdot\frac{2}{3} = \frac{58}{57} \Rightarrow (\frac{58}{57} - 1)\cdot 100 = \frac{100}{57}$ **%-kal nő a fv.érték.**

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & , \text{ ha } |x| > 1 \\ x^3 & , \text{ ha } |x| \le 1 \end{cases}$. Rajzolja fel a függvényt !

$f(4) = ?$ $f(-\frac{1}{2}) = ?$

$f(4) = \frac{1}{16}$, $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$



4. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2x+3}{2x-1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x+9}{2x+2}}$, $x = ?$

$\frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2 \Rightarrow \frac{2x+3}{2x-1} = 2\cdot\frac{x+9}{2x+2} \Rightarrow (2x+3)(x+1) = (2x-1)(x+9) \Leftrightarrow 2x^2 + 5x + 3 = 2x^2 + 17x - 9 \Leftrightarrow 12x = 12$, $x = 1$.

5. $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}} = 1$, $x = ?$ $\sqrt{(\sqrt{x+2}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x+2}-3)^2} = 1 \Leftrightarrow |\sqrt{x+2}-2| + |\sqrt{x+2}-3| = 1$,

$A := \sqrt{x+2}$, $\Rightarrow |A-2| + |A-3| = 1$, **I.** Ha $A < 2$, akkor $-(A-2)-(A-3) = 1 \Leftrightarrow -2A = -4$, $A = 2$ nem kisebb 2-nél.

II. Ha $2 \le A < 3$, akkor $(A-2)-(A-3) = 1$, ez minden $A \in [2,3)$ esetén fennáll. **III.** Ha $3 \le A$, akkor $(A-2)+(A-3) = 1 \Leftrightarrow$

$2A = 6$, $A = 3$. $\Rightarrow$ **Az egyenlet megoldásai :** $2 \le \sqrt{x+2} \le 3 \Leftrightarrow 4 \le x+2 \le 9 \Leftrightarrow 2 \le x \le 7$.

6. $\text{ctg}(2\pi\cos^2(2\pi x)) = 0$, $x = ?$ $2\pi\cos^2(2\pi x) = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), $\cos^2(2\pi x) = \frac{1}{4} + \frac{k}{2}$, $k = 0, 1$ u.i.

$0 \le \cos^2(2\pi x) \le 1$. $\Leftrightarrow |\cos(2\pi x)| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{k}{2}}$. **I.** Ha $k = 0$, akkor $\cos(2\pi x) = \pm\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\pi x = \pm\frac{\pi}{3} + n\cdot 2\pi$, $x = \pm\frac{1}{6} + n$,

vagy $2\pi x = \pm\frac{2\pi}{3} + n\cdot 2\pi$, $x = \pm\frac{1}{3} + n$, $n \in \mathbf{Z}$. **II.** Ha $k = 1$, akkor $\cos(2\pi x) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 2\pi x = \pm\frac{\pi}{6} + n\cdot 2\pi$, $x = \pm\frac{1}{12} + n$,

vagy $2\pi x = \pm\frac{5\pi}{6} + n\cdot 2\pi$, $x = \pm\frac{5}{12} + n$, $n \in \mathbf{Z}$. **Megoldások** (Összefoglalva) **:** $x = \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{4}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{8}{12}, \frac{10}{12}, \frac{11}{12} + n$, $n \in \mathbf{Z}$.