1. $\sqrt{3}-\sqrt{4+2\cdot\sqrt{3}}+\left(\sqrt{3}\right)^{\log_9\frac{1}{4}-\log_{1/3}2}=\sqrt{3}-\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}+\left(\sqrt{3}\right)^{\log_9\frac{1}{4}}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{-\log_{1/3}2}=$ (10 pont)

$$=\sqrt{3}-\left|1+\sqrt{3}\right|+\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_9\sqrt{3}}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{\log_3 2}=\sqrt{3}-1-\sqrt{3}+\left(\frac{1}{4}\right)^{1/4}\cdot 2^{\log_3\sqrt{3}}=-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\ \boxed{=0}\ .$$

2. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra : (a kifejezés csak $x>0$ esetén értelmezett) (10 pont)

$$\sqrt[5]{\frac{x^2\cdot\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x^3\cdot\sqrt{x}}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt[5]{\frac{x\cdot\sqrt[6]{x^7}}{x\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x}}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt[5]{\frac{\sqrt{\sqrt[3]{x^7}}}{\sqrt{\sqrt{x^3}}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt[10]{\frac{\sqrt[6]{x^{14}}}{\sqrt[6]{x^9}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt[60]{x^5}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[12]{x^6}}\ \boxed{=\frac{1}{\sqrt[12]{x^5}}}\ .$$

vagy másképpen pl. így :

$$\left(x^2\cdot x^{1/6}\cdot\left(x^3\cdot x^{1/2}\right)^{-1/2}\right)^{1/5}\cdot x^{-1/2}=\left(x^{13/6}\cdot\left(x^{-3/2}\cdot x^{-1/4}\right)\right)^{1/5}\cdot x^{-1/2}=x^{13/30}\cdot\left(x^{-7/4}\right)^{1/5}\cdot x^{-1/2}=x^{\frac{13}{30}-\frac{7}{20}-\frac{1}{2}}=x^{\frac{26-21-30}{60}}=x^{-\frac{5}{12}}\ .$$

3. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra : (10 pont)

$$\left(\frac{2ab}{4a^2-9b^2}+\frac{b}{3b-2a}\right):\left(1-\frac{2a-3b}{2a+3b}\right)=\left(\frac{2ab}{(2a-3b)\cdot(2a+3b)}-\frac{b}{2a-3b}\right):\left(\frac{2a+3b-2a+3b}{2a+3b}\right)=$$

$$=\frac{2ab-b\cdot(2a+3b)}{(2a-3b)\cdot(2a+3b)}\cdot\frac{2a+3b}{6b}=\frac{-3b^2}{2a-3b}\cdot\frac{1}{6b}=\frac{-b}{2a-3b}\cdot\frac{1}{2}\ \boxed{=-\frac{b}{4a-6b}}\ .$$

4. Dodó, a kétpúpú teve, ha nagyon szomjas, akkor testtömegének 84 %-a víz.
Itatás után 800 kg-ot nyom, és ekkor testömegének 85 %-a víz.
Hány kg-os Dodó, amikor nagyon szomjas ?

Itatás után a 800 kg-nak 85 %-a víz, így a 15 %-a , azaz $800\cdot 0.15=120$ kg a testtömegének szárazanyag tartalma.

Amikor szomjas, akkor ez a szárazanyag tartalom a testtömegének 16 %-a , vagyis az 1 % : $\frac{120}{16}=\frac{15}{2}=7.5$ kg.

Dodó tehát $\boxed{\text{750 kg-os, amikor nagyon szomjas}}$.

5. Határozzuk meg az $f(x)=\ln(3+x-x^2)$ függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit ! (10 pont)

$D_f=\{x\in\mathbf{R}:\ 3+x-x^2>0\}$, a $-x^2+x+3$ polinom gyökei $x_{1,2}=\frac{1\mp\sqrt{1+12}}{2}\ \Rightarrow\ \boxed{D_f=\left\{x\in\mathbf{R}:\ \frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}}$.

Zérushelyek meghatározása :

$f(x)=\ln(3+x-x^2)=0\ \Leftrightarrow\ 3+x-x^2=1\ \Leftrightarrow\ x^2-x-2=0\ \Rightarrow\ \boxed{x_1=-1\ \text{ és }\ x_2=2}$, ezek a zérushelyek.

1. $\sqrt{7}-\sqrt{8+2\cdot\sqrt{7}}+\left(\sqrt{5}\right)^{\log_{1/5}2-\log_{25}\frac{1}{4}}=\sqrt{7}-\sqrt{(1+\sqrt{7})^2}+\left(\sqrt{5}\right)^{\log_{1/5}2}\cdot\left(\sqrt{5}\right)^{\log_{25}4}=$ (10 pont)

$=\sqrt{7}-\left|1+\sqrt{7}\right|+2^{\log_{1/5}\sqrt{5}}\cdot 4^{\log_{25}\sqrt{5}}=\sqrt{7}-1-\sqrt{7}+2^{-1/2}\cdot 4^{1/4}=-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}$ $\boxed{=0}$.

2. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra : (a kifejezés csak $x>0$ esetén értelmezett) (10 pont)

$$\sqrt[3]{\frac{x^2\cdot\sqrt[10]{x}}{\sqrt{x^5\cdot\sqrt{x}}}}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x}}=\sqrt[3]{\frac{x^2\cdot\sqrt[10]{x}}{x^2\cdot\sqrt{x\cdot\sqrt{x}}}}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x}}=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{\sqrt[5]{x}}}{\sqrt{\sqrt{x^3}}}}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x}}=\sqrt[6]{\frac{\sqrt[10]{x^2}}{\sqrt[10]{x^{15}}}}\cdot\frac{1}{\sqrt[60]{x^{12}}}=\frac{1}{\sqrt[60]{x^{25}}}\quad\boxed{=\frac{1}{\sqrt[12]{x^5}}}\ .$$

vagy másképpen pl. így :

$$\left(x^2\cdot x^{1/10}\cdot\left(x^5\cdot x^{1/2}\right)^{-1/2}\right)^{1/3}\cdot x^{-1/5}=\left(x^{21/10}\cdot\left(x^{-5/2}\cdot x^{-1/4}\right)\right)^{1/3}\cdot x^{-1/5}=x^{7/10}\cdot\left(x^{-11/4}\right)^{1/3}\cdot x^{-1/5}=x^{\frac{7}{10}-\frac{11}{12}-\frac{1}{5}}=x^{\frac{42-55-12}{60}}=x^{-\frac{5}{12}}\ .$$

3. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra : (10 pont)

$$\left(\frac{y}{2x+3y}+\frac{2xy}{9y^2-4x^2}\right):\left(\frac{2x+3y}{2x-3y}-1\right)=\left(\frac{y}{2x+3y}-\frac{2xy}{(2x-3y)\cdot(2x+3y)}\right):\left(\frac{2x+3y-2x+3y}{2x-3y}\right)=$$

$$=\frac{y\cdot(2x-3y)-2xy}{(2x-3y)\cdot(2x+3y)}\cdot\frac{2x-3y}{6y}=\frac{-3y^2}{2x+3y}\cdot\frac{1}{6y}=\frac{-y}{2x+3y}\cdot\frac{1}{2}\quad\boxed{=-\frac{y}{4x+6y}}\ .$$

4. Dodó, a kétpúpú teve, ha nagyon szomjas, akkor testtömegének 84 %-a víz.
Itatás után 1200 kg-ot nyom, és ekkor testömegének 85 %-a víz.
Hány kg-os Dodó, amikor nagyon szomjas ?

Itatás után az 1200 kg-nak 85 %-a víz, így a 15 %-a , azaz $1200\cdot 0.15=180$ kg a testtömegének szárazanyag tartalma.

Amikor szomjas, akkor ez a szárazanyag tartalom a testtömegének 16 %-a , vagyis az 1 % : $\frac{180}{16}=\frac{45}{4}=11.25$ kg.

Dodó tehát $\boxed{1125 \text{ kg-os, amikor nagyon szomjas}}$.

5. Határozzuk meg az $f(x)=\ln\left(x^2-x-5\right)$ függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit ! (10 pont)

$D_f=\{x\in\mathbf{R}:\ x^2-x-5>0\}$, az x^2-x-5 polinom gyökei $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{D_f=\{x\in\mathbf{R}:\ x<\frac{1-\sqrt{21}}{2}\ \text{vagy}\ x>\frac{1+\sqrt{21}}{2}\}}$.

Zérushelyek meghatározása :

$f(x)=\ln\left(x^2-x-5\right)=0\quad\Leftrightarrow\quad x^2-x-5=1\quad\Leftrightarrow\quad x^2-x-6=0\quad\Rightarrow$ $\boxed{x_1=-2\ \text{ és }\ x_2=3}$, ezek a zérushelyek.