1. $\sqrt{9+4\cdot\sqrt{5}} - \sqrt{5} + \sqrt{3^{\log_{1/3}4 - \log_{\sqrt{3}}2}} = \sqrt{(2+\sqrt{5})^2} - \sqrt{5} + \sqrt{3^{\log_{1/3}4}\cdot 3^{-\log_{\sqrt{3}}2}} =$ (10 pont)

$= \left|2+\sqrt{5}\right| - \sqrt{5} + \sqrt{3^{-\log_3 4}\cdot((\sqrt{3})^2)^{\log_{\sqrt{3}}2^{-1}}} = 2+\sqrt{5}-\sqrt{5} + \sqrt{3^{\log_3 4^{-1}}\cdot((\sqrt{3})^{\log_{\sqrt{3}}2^{-1}})^2} = 2 + \sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}\ \boxed{=\frac{9}{4}}$.

2. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra : (a kifejezés csak $x \geq 0$ esetén értelmezett) (10 pont)

$$\sqrt{x^3\cdot\sqrt[4]{x\cdot\sqrt{x^{10}}}} - \sqrt{x^3\cdot\sqrt{x^3}} = \sqrt{\sqrt[4]{x^{12}\cdot\sqrt{x^{12}}}} - \sqrt{\sqrt{x^6\cdot x^3}} = \sqrt[16]{x^{36}} - \sqrt[4]{x^9}\ \boxed{=0}\ .$$

(vagy másképpen pl. így :

$$\left(x^3\cdot(x\cdot(x^{10})^{1/2})^{1/4}\right)^{1/2} - \left(x^3\cdot(x^3)^{1/2}\right)^{1/2} = \left(x^3\cdot(x\cdot x^5)^{1/4}\right)^{1/2} - \left(x^3\cdot x^{3/2}\right)^{1/2} = \left(x^3\cdot x^{6/4}\right)^{1/2} - \left(x^3\cdot x^{3/2}\right)^{1/2} = 0\ ,$$

vagy így is egyszerű : $\sqrt{x^3\cdot\sqrt[4]{x\cdot\sqrt{x^{10}}}} - \sqrt{x^3\cdot\sqrt{x^3}} = \sqrt{x^3\cdot\sqrt[4]{\sqrt{x^{12}}}} - \sqrt{x^3\cdot\sqrt{x^3}} = \sqrt{x^3\cdot\sqrt[4]{x^6}} - \sqrt{x^3\cdot\sqrt{x^3}} = 0$.)

3. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra : (10 pont)

$$\left(\frac{1}{a^2-ab} - \frac{3b^2}{a^4-ab^3} - \frac{b}{a^3+a^2b+ab^2}\right)\cdot\left(b+\frac{a^2}{a+b}\right) = \left(\frac{1}{a\cdot(a-b)} - \frac{3b^2}{a\cdot(a^3-b^3)} - \frac{b}{a\cdot(a^2+ab+b^2)}\right)\cdot\left(\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}\right) =$$

$$= \frac{a^2+ab+b^2-3b^2-b\cdot(a-b)}{a\cdot(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b} = \frac{a^2-b^2}{a\cdot(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}\ \boxed{=\frac{1}{a}}\ .$$

4. Legyen $f(x) = \ln(x+1)$ és $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Mivel egyenlő $f(g(x))$ és $g(f(x))$? (10 pont)

Mivel egyenlő $f(g(0))$ és $g(f(0))$?

$f(g(x)) = \ln(g(x)+1)\ \boxed{=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)}$, Megj. : $D_{f\circ g} = D_g = \mathbf{R}$,

$g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{(f(x))^2+1}}\ \boxed{=\frac{1}{\sqrt{(\ln(x+1))^2+1}}}$, Megj. : $D_{g\circ f} = D_f = \{x\in\mathbf{R}:\ x>-1\} = (-1, +\infty)$.

$f(g(0)) = \ln(g(0)+1) = \ln(1+1)\ \boxed{=\ln 2}$, (ezt $f(g(x))$ már meghatározott alakjából is megkaphatjuk)

$g(f(0)) = \frac{1}{\sqrt{(f(0))^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{0^2+1}}\ \boxed{=1}$. (ezt $g(f(x))$ már meghatározott alakjából is megkaphatjuk)

5. Határozzuk meg az $f(x) = \ln(3-|x-2|)$ függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit ! (10 pont)

$D_f = \{x\in\mathbf{R}:\ 3-|x-2| > 0\}$. $\quad |x-2| < 3 \iff -3 < x-2 < 3 \iff \boxed{-1 < x < 5}$.

$f(x) = \ln(3-|x-2|) = 0 \iff 3-|x-2| = 1 \iff |x-2| = 2 \iff x-2 = 2$ vagy $x-2 = -2 \iff$

$\boxed{x_1 = 4 \text{ és } x_2 = 0}$, ezek a zérushelyek.

1. $\sqrt{11+6\cdot\sqrt{2}} - \sqrt{2} + \sqrt{5^{\log_{\sqrt{5}} 2 - \log_{1/5} 4}} = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{2} + \sqrt{5^{\log_{\sqrt{5}} 2} \cdot 5^{-\log_{1/5} 4}} =$ (10 pont)

$$= \left|3+\sqrt{2}\right| - \sqrt{2} + \sqrt{2^{\log_{\sqrt{5}} 5} \cdot 5^{\log_5 4}} = 3+\sqrt{2}-\sqrt{2} + \sqrt{2^2\cdot 4} = 3 + 4 \boxed{= 7} .$$

2. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra : (a kifejezés csak $x \geq 0$ esetén értelmezett) (10 pont)

$$\sqrt{x^4\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt{x^7}}} - \sqrt{x^3\cdot\sqrt{x^5}} = \sqrt{\sqrt[3]{x^{12}\cdot\sqrt{x^9}}} - \sqrt{\sqrt{x^6\cdot x^5}} = \sqrt[12]{x^{33}} - \sqrt[4]{x^{11}} \boxed{= 0} .$$

(vagy másképpen pl. így :

$$\left(x^4\cdot(x\cdot(x^7)^{1/2})^{1/3}\right)^{1/2} - \left(x^3\cdot(x^5)^{1/2}\right)^{1/2} = \left(x^4\cdot(x\cdot x^{7/2})^{1/3}\right)^{1/2} - \left(x^3\cdot x^{5/2}\right)^{1/2} = \left(x^4\cdot x^{9/6}\right)^{1/2} - \left(x^4\cdot x^{3/2}\right)^{1/2} = 0 ,$$

vagy így is egyszerű : $\sqrt{x^4\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt{x^7}}} - \sqrt{x^3\cdot\sqrt{x^5}} = \sqrt{x^3\cdot\sqrt[3]{x^3\cdot\sqrt{x^9}}} - \sqrt{x^3\cdot\sqrt{x^5}} = \sqrt{x^3\cdot\sqrt[6]{x^{15}}} - \sqrt{x^3\cdot\sqrt{x^5}} = 0 .$)

3. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra : (10 pont)

$$\left(y+\frac{x^2}{x+y}\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2-xy}-\frac{y}{x^3+x^2y+xy^2}-\frac{3y^2}{x^4-xy^3}\right) = \left(\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}\right)\cdot\left(\frac{1}{x\cdot(x-y)}-\frac{y}{x\cdot(x^2+xy+y^2)}-\frac{3y^2}{x\cdot(x^3-y^3)}\right) =$$

$$= \frac{x^2+xy+y^2}{x+y}\cdot\frac{x^2+xy+y^2-y\cdot(x-y)-3y^2}{x\cdot(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)} = \frac{x^2+xy+y^2}{x+y}\cdot\frac{x^2-y^2}{x\cdot(x-y)\cdot(x^2+xy+y^2)} \boxed{= \frac{1}{x}} .$$

4. Legyen $f(x) = \mathbf{e}^x - 1$ és $g(x) = \sqrt{x^2+1}$. Mivel egyenlő $f(g(x))$ és $g(f(x))$? (10 pont)

Mivel egyenlő $f(g(0))$ és $g(f(0))$?

$f(g(x)) = \mathbf{e}^{g(x)} - 1 \boxed{= \mathbf{e}^{\sqrt{x^2+1}} - 1}$, Megj. : $D_{f\circ g} = D_g = \mathbf{R}$,

$g(f(x)) = \sqrt{(f(x))^2+1} \boxed{= \sqrt{(\mathbf{e}^x-1)^2+1}}$, Megj. : $D_{g\circ f} = D_f = \mathbf{R}$.

$f(g(0)) = \mathbf{e}^{g(0)} - 1 = \mathbf{e}^1 - 1 \boxed{= = \mathbf{e} - 1}$, (ezt $f(g(x))$ már meghatározott alakjából is megkaphatjuk)

$g(f(0)) = \sqrt{(f(0))^2+1} = \sqrt{0^2+1} \boxed{= 1}$. (ezt $g(f(x))$ már meghatározott alakjából is megkaphatjuk)

5. Határozzuk meg az $f(x) = \ln\left(\left|x+2\right|-8\right)$ függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit ! (10 pont)

$D_f = \{ x\in\mathbf{R} : \left|x+2\right|-8 > 0 \}$. $\left|x+2\right| > 8 \Leftrightarrow x+2>8$ vagy $x+2<-8 \Leftrightarrow \boxed{x > 6 \text{ vagy } x < -10}$.

$f(x) = \ln\left(\left|x+2\right|-8\right) = 0 \Leftrightarrow \left|x+2\right|-8 = 1 \Leftrightarrow \left|x+2\right| = 9 \Leftrightarrow x+2 = 9$ vagy $x+2 = -9 \Leftrightarrow$

$\boxed{x_1 = 7 \text{ és } x_2 = -11}$, ezek a zérushelyek.