1. Rakjuk növekvő sorrendbe az alábbi számokat : (8 pont)

$$A = \ln\frac{1}{e^3} = -3, \qquad B = \sqrt{7+2\sqrt{3}} > \sqrt{9} = 3, \qquad C = \sqrt{64^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{8} = 2 , \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{A < C < B} .$$

2. $$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 9} \cdot 3^2 + \left(\log_2 5 + \log_2 \frac{8}{5}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot 3^2 + \log_2\left(5\cdot\frac{8}{5}\right) = \frac{1}{9}\cdot 9 + \log_2 2^3 = 1+3 \ \boxed{=4} .$$ (8 pont)

3. $$\sin\frac{31\pi}{6} - \mathrm{ctg}\,\frac{9\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{6}+5\pi\right) - \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right) - \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}-1 \ \boxed{= -\frac{3}{2}} .$$ (8 pont)

4. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra : (8 pont)

$$\frac{(\sqrt{3})^{2n}\cdot 2^n \cdot 9^{-n}\cdot 27^{n/3}}{(\sqrt{2})^{2n}\cdot 2^n + 2\cdot 2^{2n} + 16^{n/2}} = \frac{3^n\cdot 2^n\cdot 9^{-n}\cdot 3^n}{2^n\cdot 2^n + 2\cdot 2^{2n} + 2^{2n}} = \frac{9^n\cdot 2^n\cdot 9^{-n}}{2^n\cdot(2^n+2\cdot 2^n+2^n)} = \frac{1}{4\cdot 2^n} \ \boxed{= 2^{-(n+2)}} .$$

5. Legyen $f(x) = e^{x^2-1}$ és $g(x) = \sqrt[3]{x+2}$. Mivel egyenlő $f(g(x))$ és $g(f(x))$? (10 pont)

Mivel egyenlő $f(g(6))$ és $g(f(1))$?

$$f(g(x)) = e^{(g(x))^2-1} = e^{(\sqrt[3]{x+2}\,)^2-1} \ \boxed{= e^{\sqrt[3]{x^2+4x+4}\,-1}} ,$$ Megj. : $D_{f\circ g} = D_g = \mathbf{R}$,

$$g(f(x)) = \sqrt[3]{e^{x^2-1}+2} \ \boxed{= \sqrt[3]{e^{x^2-1}+2}} ,$$ Megj. : $D_{g\circ f} = D_f = \mathbf{R}$,

$$f(g(6)) = f(\sqrt[3]{6+2}\,) = f(2) = e^{2^2-1} \ \boxed{= e^3} ,$$

$$g(f(1)) = g(e^{1^2-1}) = g(1) = \sqrt[3]{1+2} \ \boxed{= \sqrt[3]{3}} .$$

6. Adjuk meg a $g(x) = \dfrac{2(x-3)\cdot(x+2)^3 - 3(x+2)^2\cdot(x-3)^2}{(x-3)^4\cdot(x+2)}$ függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit ! (8 pont)

$D_g = \mathbf{R}\setminus\{3,-2\}$ (u.i. a nevezőben nem lehet zérus)

$$g(x) = \frac{2(x-3)\cdot(x+2)^3 - 3(x+2)^2\cdot(x-3)^2}{(x-3)^4\cdot(x+2)} = \frac{2(x+2)^2 - 3(x+2)\cdot(x-3)}{(x-3)^3} = \frac{(x+2)\cdot(2(x+2)-3(x-3))}{(x-3)^3} =$$

$$= \frac{(x+2)\cdot(13-x)}{(x-3)^3}$$ $\Rightarrow$ mivel $x \neq -2$, így $g(x)=0$ pontosan akkor, ha $x = 13$, tehát $\boxed{f \text{ egyetlen zérushelye a } 13}$.

1. Rakjuk növekvő sorrendbe az alábbi számokat : (8 pont)

$$A = \lg 0.0001 = \lg 10^{-4} = -4\,, \qquad B = e^{2\cdot\ln 2} = e^{\ln(2^2)} = 4\,, \qquad C = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\log_3 9} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}\,, \quad \Rightarrow \quad \boxed{A < C < B}\,.$$

2. (8 pont)

$$(\log_2 56 - 2\cdot\log_2\sqrt{7}) + \sin\frac{10\pi}{3} = \log_2\frac{56}{7} + \sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi+2\pi\right) = \log_2 2^3 + \sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right) \boxed{= 3-\frac{\sqrt{3}}{2}}\,.$$

3. (8 pont)

$$\sqrt[3]{0.027} - \frac{4^5+4^4}{4^5+4^6-4^4} = \sqrt[3]{\frac{27}{1000}} - \frac{4^4\cdot(4+1)}{4^4\cdot(4+4^2-1)} = \frac{3}{10}-\frac{5}{19} = \frac{57-50}{190} \boxed{= \frac{7}{190}}\,.$$

4. Hozzuk a lehető legegyszerűbb alakra : (8 pont)

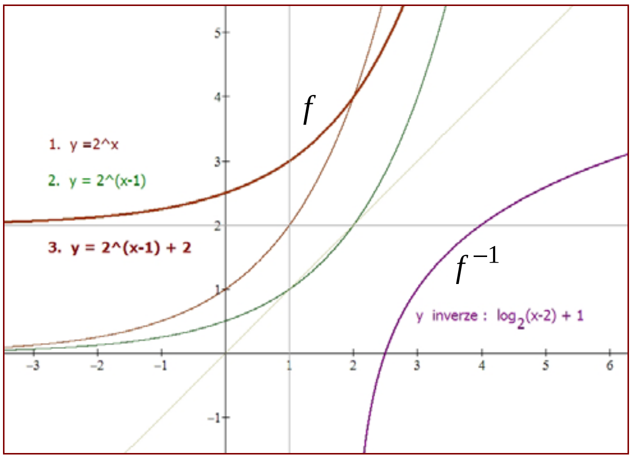
$$\frac{2+\dfrac{3x-1}{1-x}}{1-\dfrac{x^2}{x^2-1}} : \frac{x^3+1}{x^2-x+1} = \frac{\dfrac{2-2x+3x-1}{1-x}}{\dfrac{x^2-1-x^2}{x^2-1}} \cdot \frac{x^2-x+1}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)} =$$

$$= \frac{x+1}{1-x}\cdot\frac{x^2-1}{-1}\cdot\frac{1}{x+1} = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} \boxed{= x+1} \quad \text{és} \quad x \neq \pm 1\,.$$

5. Ábrázoljuk az $f(x) = 2^{x-1} + 2$ függvényt és adjuk meg az inverzét ! (10 pont)

Függvénytaranszformációval ábrázolva f grafikonját :

az $y = 2^x$ grafikont az x tengely mentén 1-gyel jobbra, majd az y tengely mentén 2-vel felfelé kell eltolnunk.



$D_f = \mathbf{R}$, $R_f = (2, +\infty)$,

f injektív u.i. szig. mon. növő, így az inverze létezik :

f **inverzének meghatározása :**

$D_{f^{-1}} = R_f = (2, +\infty)$,

$$x = 2^{f^{-1}(x)-1} + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x-2 = 2^{f^{-1}(x)-1}$$

$$\log_2(x-2) = f^{-1}(x)-1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{f^{-1}(x) = \log_2(x-2)+1}$$

(Vagy így : $x = 2^{y-1} + 2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \log_2(x-2)+1$)

Megj.: $R_{f^{-1}} = D_f = \mathbf{R}$,

Ha f grafikonját koordinátatranszformációval ábrázoltuk volna, akkor az $\eta = 2^{\xi}$ exponenciális függvénygrafikont kellett volna abban a ξ, η koordinátarendszerben ábrázolni, melynek origója az x, y koordinátarendszer $(1, 2)$ pontjában van, s tengelyei párhuzamosak az x, y tengelyekkel, s az egységek változatlanok.

6. Legyen $f(x) = x\cdot\sqrt{x}+2$ és $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$. Mivel egyenlő $f(g(x))$ és $g(f(x))$? (8 pont)
Mivel egyenlő $f(g(1))$ és $g(f(1))$?

$$f(g(x)) = g(x)\cdot\sqrt{g(x)}+2 = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\cdot\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{x}}}+2 = 2\cdot\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\cdot\frac{2}{\sqrt[3]{x}}}+2 = 2\cdot\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{x^3}}}+2 \boxed{= 2\cdot\sqrt{\frac{2}{x}}+2}\,, \quad (D_{f\circ g} = \mathbf{R}^+)\,,$$

$$g(f(x)) = \frac{2}{\sqrt[3]{f(x)}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x\cdot\sqrt{x}+2}} \boxed{= \frac{2}{\sqrt[3]{\sqrt{x^3}+2}}}\,, \qquad (D_{g\circ f} = [0, +\infty))\,.$$

$$f(g(1)) = \frac{2}{\sqrt[3]{1}}\cdot\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{1}}}+2 \boxed{= 2\cdot\sqrt{2}+2}\,, \qquad g(f(1)) = \frac{2}{\sqrt[3]{1\cdot\sqrt{1}+2}} \boxed{= \frac{2}{\sqrt[3]{3}}}\,.$$